Gamma 时变过程与 Black-Scholes 期权定价的定价偏差纠正

《中华学术论坛》2004.12

奚 炜
复旦大学经济学院博士后流动站　上海期货交易所博士后工作站

摘要:本文针对 Black-Scholes 期权定价的定价偏差，介绍了一种对该模型的改进模型，它是通过将 gamma 过程作为时变过程嵌入 Black Scholes 期权定价模型中的布朗运动来实现的。

关键词：波动率微笑；gamma 时变过程；期权定价模型
中国分类号：F830.91 **文献标识码：**A

Gamma Time Change Process and Pricing Biases Correction of Black-Scholes Option Pricing Model

Xi Wei (Post Doctor Programme of Economic College, Fudan University & Post Doctor Programme of Shanghai Futures Exchange, 200433 Shanghai)

Abstract: This paper introduces a new modification to Black Scholes option pricing model for pricing biases correction by bringing gamma process into Brownian motion as the time change process.

Keywords: volatility smile; gamma time change process; option pricing model

1. 引言

Black Scholes 期权定价模型是金融业内的人士广为采用的定价模型，但长期的市场验证表明它有明显的定价偏差，其中最著名的定价偏差是波动率微笑。也就是说，基于相同标的资产波动率的期权市场价格，如果仅仅是期权的执行价格不同，那么通过 Black Scholes 期权定价模型反演获得的一组隐含波动率之间理论上应该趋同,而实际上它们根据执行价格的不同呈现出有规律的差异。因为隐含波动率关于执行价格的曲线形似微笑，所以这个定价偏差得名波动率微笑。

市场实际验证显示，Black Scholes 期权定价模型关于资产价格收益服从正态分布的前提假设与实际市场特性不相符合，短时间上收益分布具有比正态分布更厚的尾部，长时间上则趋近正态分布。大多数学者开始从修正资产价格收益分布入手，来解决波动率微笑等定价偏差问题。

2. Gamma 时变过程与期权定价

为了吻合市场实证的结果，同时兼顾数学处理上的需要，合适的收益模型应该至少具备以下几个性质：短时间上收益分布具有比正态分布更厚的尾部，长时间上则趋近正态分布；至少收益模型的低阶矩是有限的；描述收益的过程的分布与其独立增量族的分布一致。

基于以上考虑，Madan D.B.与 E. Seneta[1]于 1990 年，选择 gamma 过程作为时变过程来构造时变布朗运动，从而得到相应的资产收益模型。因为其分布可以看作是在给定了服从于 gamma 过程的方差下的正态分布，因此该收益模型被称为 variance gamma 模型。以后的数年中，Madan D.B.与 F. Milne[2]以及 Madan D.B.与 E. Chang[3]又进一步将该期权定价模型扩展到更为一般的市场条件下的期权定价模型。

在 Black Schole 期权定价模型中，假设动态的股票价格可由一个具有单位时间内正的期望

漂移率的连续布朗运动来描述。而 gamma 时变布朗运动模型则是在随机性的时间段来观察该布朗运动，其观察时间段的随机性假设遵循 gamma 过程。gamma 时变布朗运动模型中，除了布朗运动中的波动率之外，特有的另外两个参数是峰度(Kurtosis)与偏度(Skewness)，它们用来描述收益分布的左右尾概率上相对于正态分布的增量以及左右尾概率的不对称性。

令(Ω, F, P)是一个完备的概率空间，令时间跨度为$[0,T]$，T是一个正实数。假定标准布朗运动$b=b(b(t),t\in[0,T])$和具有均值t与方差νt的右连续独立 gamma 增量过程$G=(G(t),t\in[0,T])$都定义在这个概率空间。则$N=\{N(t)=b(G(t)),t\in[0,T]\}$是定义在这个概率空间的 gamma 时变布朗运动过程。

通俗地来说，我们可以这样理解：假定那些有经济意义的事件是随机发生的，每一件事件都有各自独立的时间长度，并在各自的时间长度上独立地对股票收益产生影响。由于这些独立的时间段在我们的日常日历上既可能相互不连续也可能相互重叠，所以就换了一个时间测度来研究受这些具有经济意义的事件影响的股票收益分布，以保证在新的时间测度下的时间是连续而且是不重叠的，而$G(t)$可以用来刻画这个新的时间测度。

用 gamma 时变布朗运动代替 Black-Scholes 期权定价模型中的布朗运动，就得到了 gamma 时变布朗运动期权定价模型，或者称 variance gamma 期权定价模型，对应的风险中性定价方法下的欧式看涨期权价格为

$$C(S_0,K,t)=S_0\cdot\Omega(a_1,b_1,t/\nu)-e^{-rt}K\cdot\Omega(a_2,b_2,t/\nu)$$

其中

$$a_1=\frac{d\eta}{\sigma\sqrt{\nu}}\qquad b_1=\frac{(\sigma^2-\theta)\sqrt{\nu}}{\sigma\eta}\qquad a_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{\nu}}\qquad b_2=-\frac{\theta}{\sigma\sqrt{\nu}}$$

$$d=\ln(S_0/K)+rt+2(t/\nu)\ln\eta$$

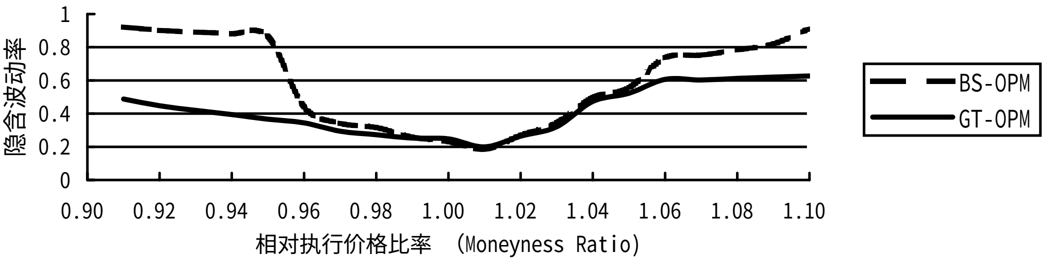
$$\eta=\sqrt{1+\theta\nu-\nu\sigma^2/2}$$

S_0为$t=0$的标的资产价格，K为执行价格，t为到期期限，σ为标的资产波动率，ν为标的资产收益分布峰度，θ为标的资产收益分布偏度，$\Omega(\bullet)$是一个三参数的退化超几何分布函数。

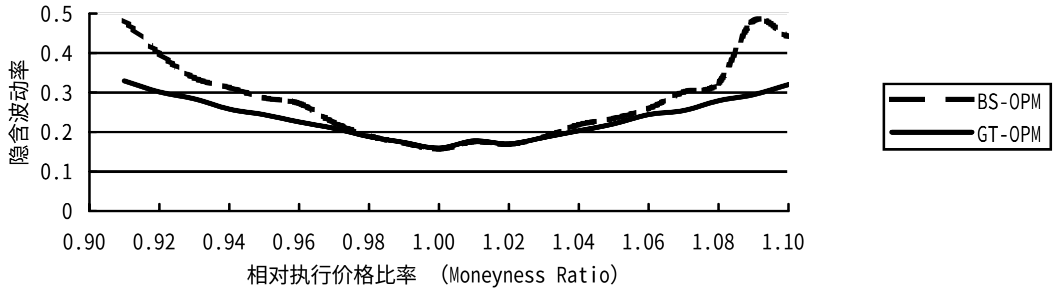
3. Gamma 时变布朗运动期权定价模型的定价性能

我们采用三年共计 157 周的香港期货交易所的恒生指数期权数据，通过 gamma 时变布朗运动期权定价模型和 Black-Scholes 期权定价模型的隐含波动率期限结构的比较，来展示 gamma 时变布朗运动期权定价模型的定价性能。以恒生指数点位与执行价格的比率为相对执行价格(moneyness ratio)，理想的基于相对执行价格的隐含波动率曲线应该是一条直线，而 Black-Scholes 期权定价模型对应的隐含波动率曲线形似微笑。从两个模型的定价性能比较，我们发现 gamma 时变布朗运动期权定价模型在波动率微笑曲线上比 Black Scholes 期权定价模型要平抑许多，也就是说在波动率微笑这一定价偏差上有很好的纠正。图一与图二给出了到期期限为一个交易日与五个交易日的两个期权定价模型隐含波动率曲线的比较。图中的 BS-OPM 是 Black-Scholes 期权定价模型的简称，而 GT-OPM 是 gamma 时变布朗运动期权定价模型的简称。

图一　　各模型之隐含波动率比较　（到期期限=1交易日）



图二　　各模型之隐含波动率比较　（到期期限=5交易日）



4. 结论

本文介绍了对 Black-Scholes 期权定价模型一种新的改进方法。这种改进方法是通过将 gamma 过程作为时变过程嵌入 Black-Scholes 期权定价模型中的布朗运动从而构造一个 gamma 时变布朗运动期权定价模型来实现的。实证结果显示，gamma 时变布朗运动期权定价模型在波动率微笑等定价偏差的纠正方面，是 Black-Schole 期权定价模型的一种比较理想的改进模型。

参考文献：

[1] Madan D.B. and E. Seneta. The variance gamma (V.G.) model for share market returns. [J]. Journal of Business, 1990,63(4): 511-524.

[2] Madan D.B. and F. Miline. Option pricing with V.G. martingale components. [J]. Mathematical Finance, 1991,1(4): 39-55.

[3] Madan D.B. and E. Chang. The variance gamma option pricing model. [Working Paper]. University of Maryland, 1998.

//作者简介：

复旦大学经济学院博士后流动站，上海期货交易所博士后工作站 联合培养 博士后//