期权的Delta对冲策略对比分析

Comparative Analysis of Options Delta Hedging Strategies

邓璎函
（中信建投期货，重庆　400015）

摘要：期权的非系统对冲方法（以固定时间间隔进行对冲、对冲至一个 delta 带、根据标的资产价格变化的对冲）有各种缺陷。基于效用最大化的方法 Hodges-Neuberger 范式从理论上解决了对冲问题，但在实践中难以实施，于是有了 Whalley-Wilmott 渐近方法和 Zakamouline 双渐近方法。

本文详细分析了 Whalley-Wilmott 方法和 Zakamouline 方法的特性。并分别通过 Monte Carlo 模拟进行动态对冲模拟和实际的恒生指数期权与期货的对冲，对比分析了三种方法（以固定时间间隔进行对冲、Whalley-Wilmott 方法和 Zakamouline 方法）的对冲效果。实证分析结果表明，对冲能够有效地减少巨额亏损的风险，且 Whalley-Wilmott 方法和 Zakamouline 方法比以固定时间间隔进行对冲的方法更节约成本，也更加有效。

关键词：期权的非系统对冲方法　Whalley-Wilmott 方法　Zakamouline 双渐近方法

BSM公式的推导中使用了对冲的概念，在实际交易中，使用对冲手段来消除标的资产的价格风险敞口是很有必要的。此外我们也需要用对冲来隔离波动率敞口。

廉价且有效的对冲手段的重要性不言而喻，成功的对冲是以最少的成本移除尽可能多的风险。

一、非系统对冲方法

不同交易员都有各自的方法来决定什么时候调整对冲头寸，在期权定价理论之后很长一段时间内，对冲都没有被定量化，因此早期的对冲策略都属于非系统化对冲。

（一）以固定的时间间隔进行对冲

最简单的对冲策略就是在固定的时间间隔进行对冲。在每个时段的末尾，执行交易以保证标的资产组合的总delta值为0（由于受到交易单位为离散值的限制，delta值尽可能接近于0）。这个办法实施起来比较简单，而且易于理解，但是在选择对冲的时间间隔时显得有些随意。很显然，提高对冲频率可以降低风险，但反

之，降低对冲频率可以降低成本。John C. Hull的书中“Delta对冲的动态过程”的例子就是这种方法。

（二）对冲至一个delta带

这种方法首先应该确定一个固定的能容忍的delta敞口，当delta超过这个数值时，交易员就进行对冲。这个delta带就是一个无需对冲的区间（No-Transaction Region），delta带的边界满足如下表达式：

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}\pm H$$

其中，H是常数。

交易员需要主观确定这个delta区间的大小，且确定的delta区间不是固定不变的，而是取决于期权头寸。因此这个方法需要随时进行调整才能实现。

（三）根据标的资产价格变化来对冲

使用这个策略的时候，交易员在标的资产价格变化到一定量之后，才对delta进行相应的调整。但是此方法需要主观确定适合触发调整平衡的价格变化量，以及刻画价格变化的指标的选择，如百分比变化、绝对价格变化、重要的技术水平、隐含波动率、历史波动率等。

二、基于效用最大化的对冲方法

对冲实际上必须在降低风险和产生成本两者之间进行权衡。当经济学家研究类似的权衡问题时，他们通常会使用效用的概念，作为在不同方法之间进行比较和选择的框架基础。

效用最大化策略试图寻求一种全局最优的对冲策略。其做法是，首先为对冲策略定义一个效用函数，然后最大化该效用函数的期望值来确定具体的对冲策略的参数。

（一）效用理论

效用理论是领导者进行决策方案选择时采用的一种理论。经济学将市场参加者的风险偏好分为三类：风险厌恶、风险爱好和风险中性。

对交易员来说，合理的效用函数最重要的是：（1）函数曲线的斜率为正，因为钱总是越多越好；（2）函数是向下凹的，因为当交易涉及更多的金额时，交易员会逐渐变得厌恶风险。

可以通过Arrow-Pratt绝对风险厌恶系数来量化风险厌恶的程度：

$$r=\frac{U'(W)}{U''(W)}$$

指数效用函数是一个常用的效用函数：

$$U(W)=-e^{-\gamma W}$$

这个效用函数的特点是具有恒定的绝对风险厌恶值$r=\gamma$，与财富拥有量W无关。

假设未来财富的均值为μ，标准差为σ，那么

$$E[U]=E[-e^{-\gamma W}]\approx -e^{-\gamma(\mu-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2)}$$

因此可知确定性等价量W_0，进一步得到风险厌恶系数γ的表达式：

$$W_0=\mu-\frac{1}{2}\gamma\sigma^2 \quad\Longrightarrow\quad \gamma=\frac{2(\mu-W_0)}{\sigma^2}$$

（二）Hodges-Neuberger方法

Hodges和Neuberger(1989)采用指数效用函数，利用随机控制中求效用最大化的方法对期权进行定价，得到一个无需对冲的区间（No-Transaction Region）。当对冲头寸低于无需对冲区域的下限时，必须

买进标的股票使之达到该下限值；反之，如果对冲头寸高于无需对冲区域的上限时，须卖出标的股票使之等于该上限值；当对冲头寸处于无需对冲区域时则不进行任何交易。

关于这个无需对冲的区间：1. 空头和多头要区别对待，用不同的方法对冲。空头的对冲带要更窄一些，即对空头头寸的对冲更为保守。2. 最优的delta对冲带并未完全覆盖BSM模型中的delta。在交易成本存在的情况下，由BSM得到的完美对冲头寸量是需要调整的。

遗憾的是，该方法的估计等式没有解析解，而即使是数值求解也非常复杂，因此在实践中难以实施。

（三）Whalley-Wilmott的渐近解

Whalley和 Wilmott(1997)在假设交易成本相对于BSM公式中的期权价格而言很小的情况下，通过对最优化系统的渐进分析，提出了一个相对容易实行的对冲算法。他们采用的是Global-in-time方法，即通过提供一个决策规则，在每个时间瞬间监控股价并决定是否进行对冲头寸调整，解决因连续交易而带来的交易成本问题。渐进分析的结果是，得到一个相对简单的用以计算无需对冲区域的公式。他们得到一个围绕 Black-Scholes 模型的 delta 值的对冲带，对冲带的边界满足如下表达式：

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm H_0$$

其中，

$$H_0 = \left(\frac{3}{2}\frac{e^{-r(T-t)}\lambda S\Gamma^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$$

其中，λ是按比例计算的交易成本：trading cost $= \lambda NS$，N是交易证券的总数量；Γ是BSM模型的gamma值；γ是风险厌恶系数。

（四）Zakamouline的双渐近解

Zakamouline(2006)研究了基于效用的对冲策略的特性，并提出了一个对冲策略公式，它能够保持Hodges-Neuberger模型最重要的特性。这个对冲带具有以下形式：

$$\Delta = \frac{\partial V(\sigma_m)}{\partial S} \pm (H_1 + H_0)$$

这个对冲带不是以BSM delta为中心的，而是根据修正后的波动率σ_m计算出的BSM delta为中心的。其中，

$$\sigma_m = \sigma\sqrt{1+K}$$

$$K = -4.76\frac{\lambda^{0.78}}{T^{0.02}}\left(\frac{e^{-rT}}{\sigma}\right)^{0.25}\left(\gamma S^2|\Gamma|\right)^{0.15}$$

$$H_0 = \frac{\lambda}{\gamma S\sigma^2 T}$$

$$H_1 = 1.12\lambda^{0.31}T^{0.05}\left(\frac{e^{-rT}}{\sigma}\right)^{0.25}\left(\frac{|\Gamma|}{\gamma}\right)^{0.5}$$

H_1是与gamma相关的项，与其在Whalley-Wilmott模型中的作用类似。H_0项使得对于深度价外期权而言（gamma可视为0时），对冲带的宽度也不等于0，这与Hodges-Neuberger模型的精确数值解的结果一致。

三、实证分析

（一）Whalley-Wilmott与Zakamouline的特性分析

1. Whalley-Wilmott的特性分析

为了考察Whalley-Wilmott的渐近方法的特性，本文找出了使用该方法得到的对

冲带与BSM delta的函数关系。图1展示了一个使用该方法进行对冲的对冲带，它使用的例子是波动率为0.3的一年期看涨期权，交易成本为0.02，持仓成本为0，利率为0.02，风险厌恶系数为1。

由图1可知，对冲带是以BSM delta为中心的，gamma多头和gamma空头所对应的对冲带是对称的，看涨期权和看跌期权的对冲带形状完全一样。

当交易成本改变时，对冲带的宽度也会改变。分析发现当交易成本下降时，对冲带宽度变小，且当交易成本为0时，对冲带就变成了BSM delta线。如图2所示，左侧是交易成本为0.02的情形，右侧是交易成本为0.005的情形。

当调整风险厌恶系数时，对冲带的宽度会改变，分析发现当风险厌恶系数上升的时候，对冲带的宽度会减小。如图3所

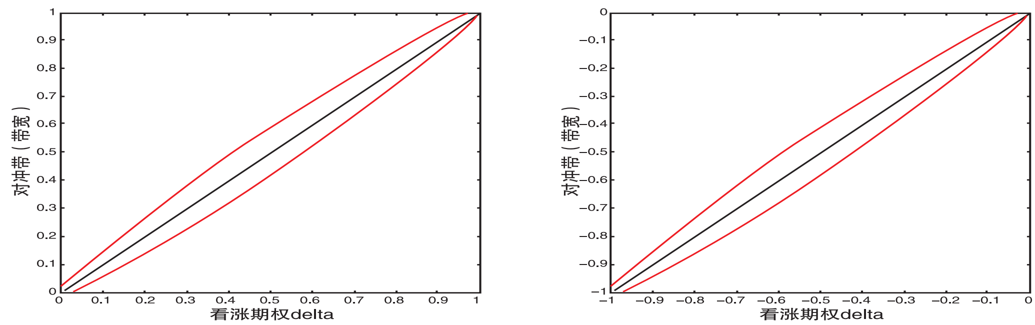

图1 Whalley-Wilmott的渐近方法得到的对冲带与BSM delta的函数关系

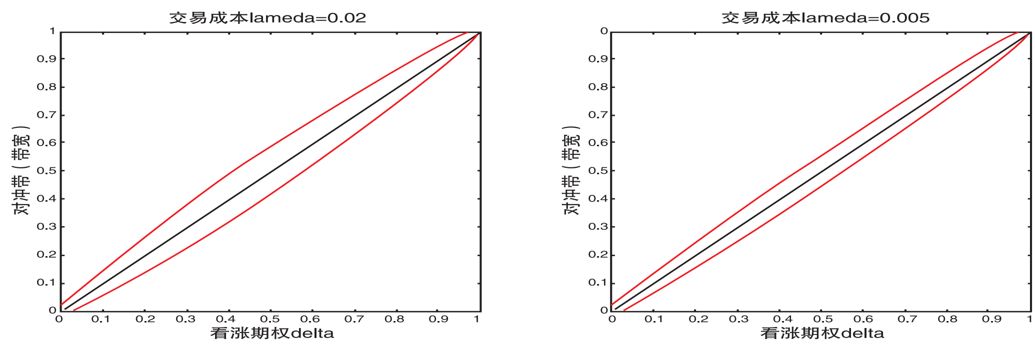

图2 Whalley-Wilmott的渐近方法下交易成本不同的比较

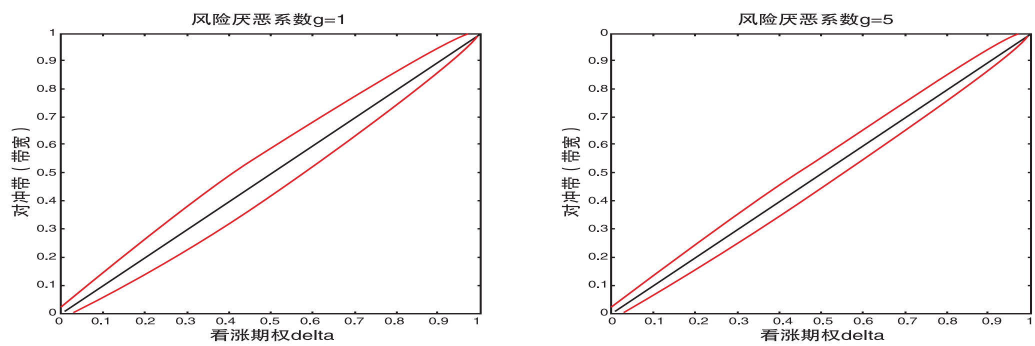

图3 Whalley-Wilmott的渐近方法下风险厌恶系数不同的比较

示，左侧是风险厌恶系数为1的情形，右侧是风险厌恶系数为5的情形。

这一方法的特点有：

①当交易成本降低时，对冲带的宽度也会减小。当交易成本为0时，对冲带就变成了BSM delta线，这和完整的Hodges-Neuberger理论是一致的。

②当风险厌恶系数上升的时候，对冲带的宽度会减小，这和完整的Hodges-Neuberger理论是一致的。

③这个方法也可用于处理其他不同形式的交易成本，即改变trading cost公式。

这一方法的不足之处以及与完整的Hodges-Neuberger方法不同的是：

①gamma多头和gamma空头所对应的对冲带对称了。渐近解的大小只与gamma的绝对大小有关，而与gamma头寸方向无关了。

②对冲带是以BSM delta为中心的。

2. Zakamouline的特性分析

为了考察Zakamouline的渐近方法的特性，本文同样找出了使用该方法得到的对冲带与BSM delta的函数关系。图4、图5展示了一个使用该方法进行对冲的对冲带，它使用的例子仍是波动率为0.3的一年期看涨期权，交易成本为0.02，持仓成本为0，利率为0.02，风险厌恶系数为1。

由图4、图5可以明显的看出，比起Whalley-Wilmott方法，Zakamouline的方法更接近Hodges-Neuberger模型的结果：（1）无需对冲的区间中间的那部分与BSM没有重叠，这正是由于使用了修正过的对冲波动率；（2）多头和空头的对冲带并不对称，期权空头的对冲带更窄一些。另外，看涨期权和看跌期权的对冲带形状完

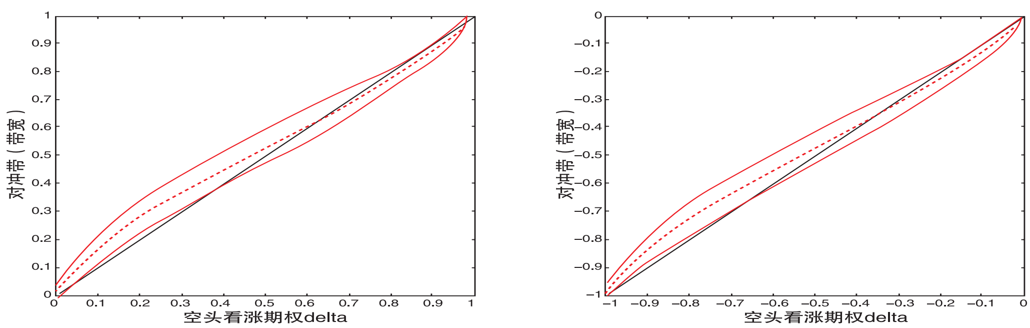

图4 Zakamouline的渐近方法得到的空头对冲带与BSM delta的函数关系

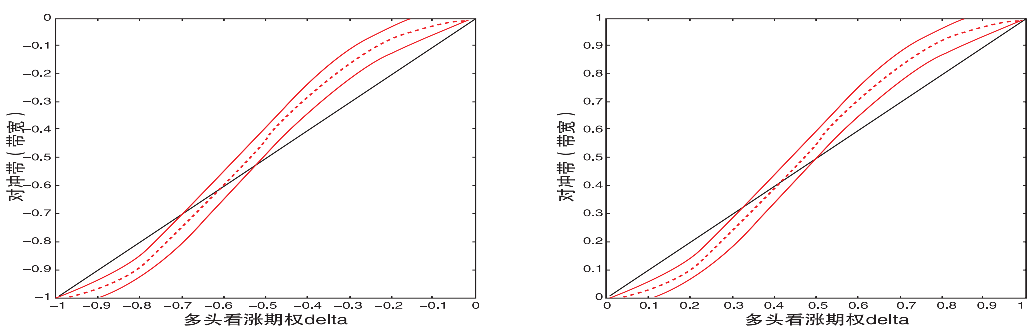

图5 Zakamouline的渐近方法得到的多头对冲带与BSM delta的函数关系

全一样。

当交易成本改变时，对冲带的宽度也会改变。分析发现当交易成本下降时，对冲带宽度变小，且当交易成本为0时，对冲带就变成了BSM delta线。同时对比空头和多头还可以发现，当交易成本下降时，空头和多头就越来越趋近于对称，不对称性减小。如图6所示，左侧是交易成本为0.02的情形，右侧是交易成本为0.005的情形。

当调整风险厌恶系数时，对冲带的

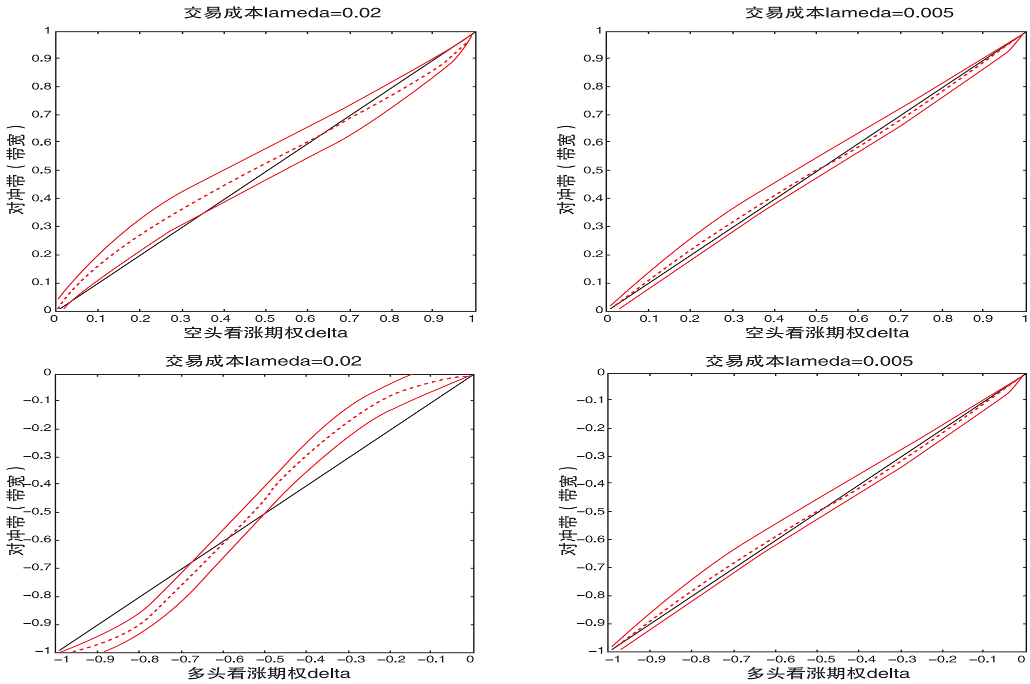

图6 Zakamouline的渐近方法下交易成本不同的比较

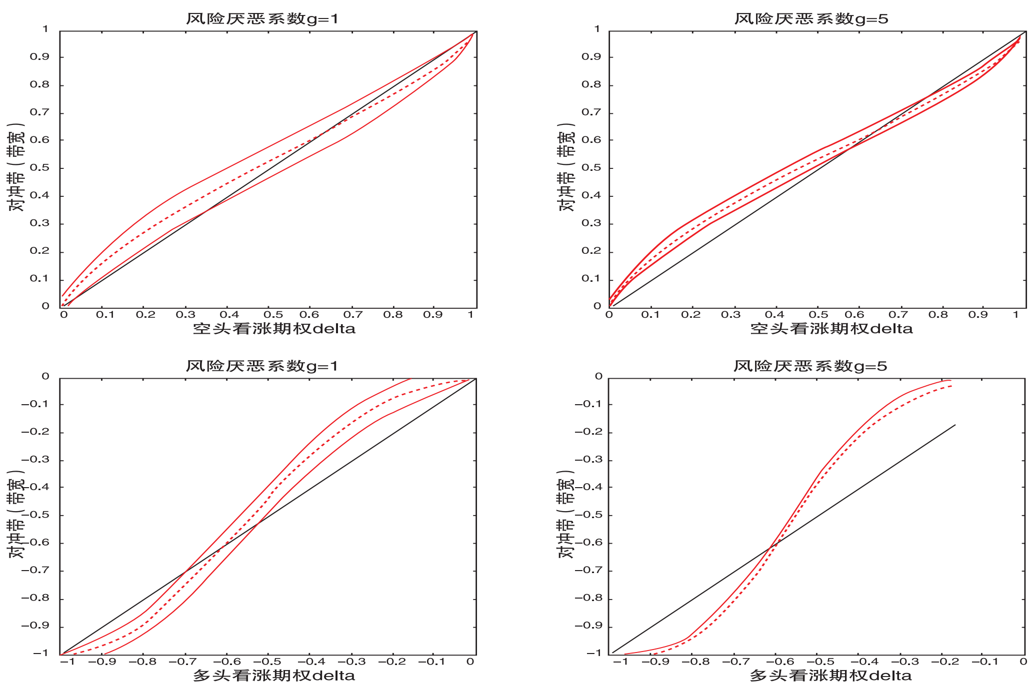

图7 Zakamouline的渐近方法下风险厌恶系数不同的比较

宽度会改变，分析发现当风险厌恶系数上升的时候，对冲带的宽度会减小。同时对比空头和多头还可以发现，当风险厌恶系数上升时，空头和多头的不对称性加剧。如图7所示，左侧是风险厌恶系数为1的情形，右侧是风险厌恶系数为5的情形。

这一方法的特点有：

①对冲带不是以BSM delta为中心的，而是以修正后的波动率 σ_m 计算出的BSM delta线（图中虚线）为中心的。

②gamma多头和gamma空头所对应的对冲带不是对称的。

③当交易成本降低时，对冲带的宽度也会减小，空头和多头不对称性减少。当交易成本为0时，对冲带就变成了BSM delta线，空头和多头也完全对称了。

④当风险厌恶系数上升的时候，对冲带的宽度会减小，空头和多头的不对称性加剧。

⑤这个方法也可用于处理其他不同形式的交易成本，即改变trading cost公式。

（二）动态对冲模拟

1. Monte Carlo模拟股价

描述股票价格行为最广泛的模型是：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

其中，σ是股票价格波动率，μ为股票价格的预期收益率。其离散形式为：

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

其中，ΔS为短时间Δt后股票价格S的变化，ϵ为标准正态分布的随机抽样值，$\epsilon \sim N(0,1)$。

Monte Carlo是从该随机过程中随机取样的一种方法。我们通过不断的从$\phi(0,1)$中抽取ϵ样本，带入股价行为模型从而得到股票价格的轨迹。

图8给出了三次20个星期的股价模拟路径图。股票初始价格为49，股票价格波动率是每年20%，股票的预期收益率是每年13%。模拟的时间间隔Δt为1分钟。

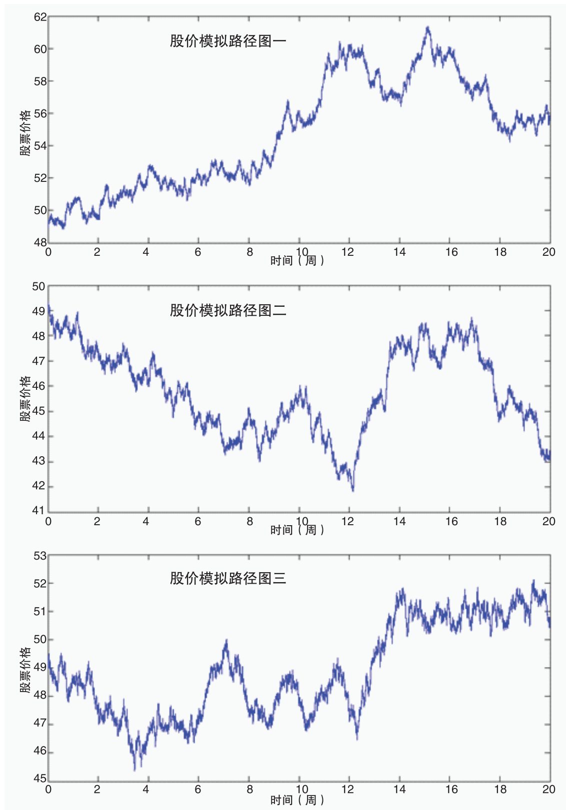

图8 股价模拟路径图

2. 用不同方法进行delta动态对冲

采用与John C. Hull的书中“Delta对冲的动态过程”的例子相同的假设：某机构出售100000股不付红利股票的欧式看涨期权，股票初始价格为49，执行价格为50，无风险利率是每年5%，股票价格波动率是每年20%，距离到期时间还有20周，股票的预期收益率是每年13%。假设交易成本为0.004，风险厌恶系数为1。

在非系统对冲方法中，以固定时间间隔进行对冲是最常用的。本文分别给出了以固定时间为1周的间隔进行delta对冲、以Whalley-Wilmott模型进行delta对冲、以Zakamouline模型进行delta对冲的三次模拟过程。三次模拟的股票价格的路径与上节中Monte Carlo模拟股价相同。

图9给出了三次模拟的Whalley-Wilmott和Zakamouline的delta带，黑色为delta随时间变化的曲线，红色为delta带随时间变化的曲线。可以看出：Zakamouline的delta带较窄；在到期时刻，Whalley-Wilmott的delta带是收敛的，而Zakamouline的delta带是发散的；Whalley-Wilmott的delta带是对称的，而Zakamouline的delta带在股价下降时下方较窄、在股价上升时上方较窄。

表1是三次模拟的结果，假设期权的卖价是BSM的价格。如果期权到期时为实值期权，那么就会被执行，对冲的损益=卖出股票收入+期权费-累计成本，由表中结果可知，不对冲的损益显著大于对冲后的损益；如果期权到期时是虚值期权，那么就不会被执行，对冲的损益=期权费-累计成本，这时损益可能是负值，但是不大。其中，BSM的期权费为2.4005，100 000股期权费应为：$2.4005\times 100000\times e^{0.05\times 30/52}=244711$。

为了进一步考察并比较动态对冲的损益，本文用Monte Carlo模拟股票价格变化1000次，所得如表2所示。

由上述结果可知，进行对冲的目的是：支付少量资金防止巨额亏损。对三种对冲方法比较：Whalley-Wilmott模型和

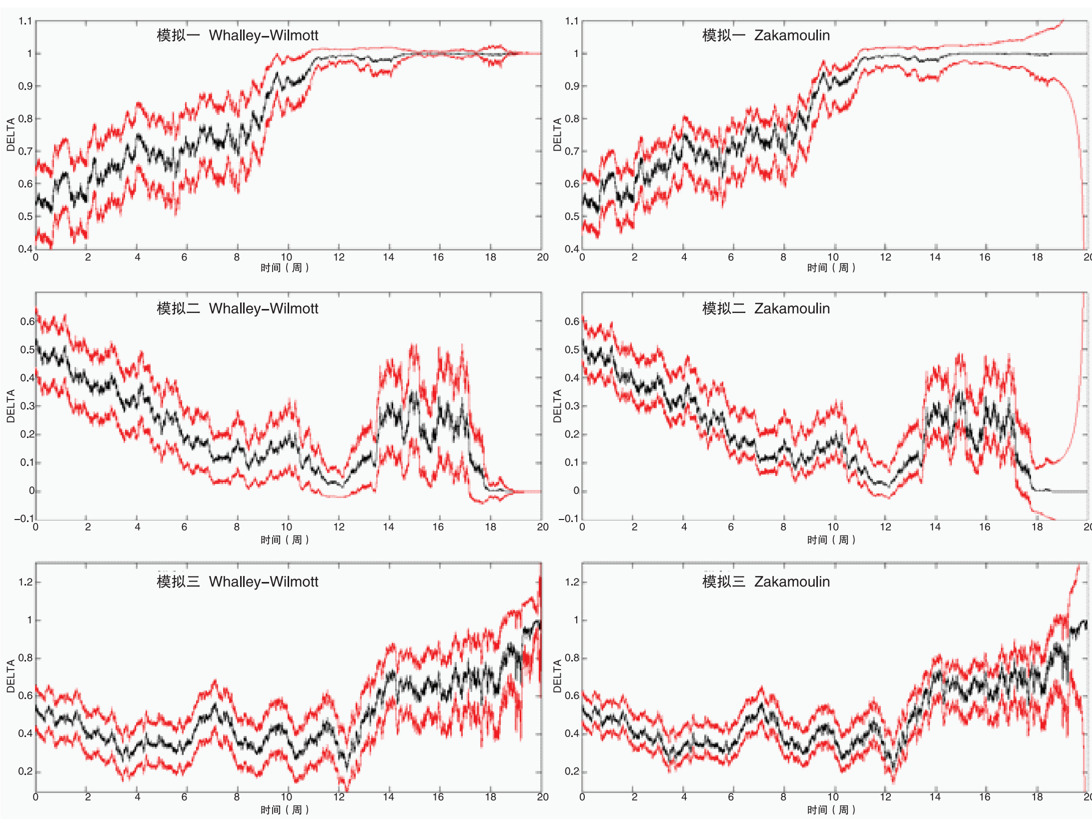

图9 三次模拟的Whalley-Wilmott和Zakamouline的delta带

表1 不同对冲方法的三次模拟结果比较分析

	期权类型	到期股票价格	卖股收入	BSM期权费	不对冲总损益	对冲方法	累计成本	对冲总损益
模拟一	实值	55.83031	5 000 000	244711	−338 320	固定时间	5 274 170	−29 448
						Zak模型	5 246 344	−1 622
						WW模型	5 236 089	8 633
模拟二	期权类型	到期股票价格	卖股收入	BSM期权费	不对冲总损益	对冲方法	累计成本	对冲总损益
	虚值	43.34297	0	244711	244 711	固定时间	297 800.6	−53 089.6
						Zak模型	282 030.4	−37 319.4
						WW模型	296 937.8	−52 226.8
模拟三	期权类型	到期股票价格	卖股收入	BSM期权费	不对冲总损益	对冲方法	累计成本	对冲总损益
	实值靠近平值	50.5703	5 000 000	244711	187 680.6	固定时间	5 177 437	67 285.3
						Zak模型	5 247 409	−2 687
						WW模型	5 279 730	−35 008

表2 Monte Carlo模拟结果统计

到期价格区间	概率	不对冲损益	对冲损益		
			固定时间	Zak模型	WW模型
40−	0.02	244 711	−67 821.7	−46 208	−19 107.5
40−45	0.11	244 711	−41 453.2	−42 533.6	−34 201.5
45−48	0.11	244 711	−39 752.1	−4 8100	−32 652
48−50	0.125	244 711	−41 928.9	−44 867.7	−52 979
50−52	0.27	121 000.6	−45 782.1	−48 197.1	−54 971.7
52−55	0.12	−137 156	−66 194.8	−48 251.6	−41 982.7
55−60	0.165	−478 802	−42 272.9	−49 885	−30 623.5
60−65	0.065	−963 858	−48 012.9	−44 977.8	−41 763.5
65+	0.015	−1 536 377	−47 896.3	−45 590.3	−22 500.4

Zakamouline模型的净支出相比固定时间的净支出少，特别是期权到期时为深度实值或深度虚值，这应该是由于对冲带的设置减少了交易次数，从而减少了交易成本；Whalley-Wilmott模型与Zakamouline模型相比，期权到期时为深度实值或深度虚值时Whalley-Wilmott模型的净支出更少，这应该是由于Zakamouline模型的对冲带相对较窄。

3. 不同方法进行delta动态对冲的套期保值效果

套期保值效果用保值效果参数评价，保值效果参数以期权保值支出的标准差与该期权的BSM价格的比率来衡量，完全对冲策略中，保值效果参数等于0。表3列出了本文在上一小节进行Monte Carlo模拟股票价格变化1000次的三种对冲方法delta保值效果的统计数据。

表3 delta对冲效果

	固定时间	Zak模型	WW模型
保值效果度量	0.152933	0.120259	0.119647

从结果可知，Whalley-Wilmott模型和Zakamouline模型的对冲方法的保值效果略好于固定时间间隔对冲方法。

（三）恒生指数期权和期货的delta动态对冲

delta对冲实际上是使保值头寸保持delta中性的状态，上文中使用股票对期权进行对冲，实际上期货也可以对期权进行对冲。期货的delta为：

$$\Delta = e^{(r-q)T}$$

其中，T为期货合约的到期日，r为无风险利率，q为红利率。

实际操作中，标的资产价格大幅度的频繁跳跃可能会影响Whalley-Wilmott方法和Zakamouline方法的有效性，我们可以考虑将以固定时间间隔对冲方法与其相结合，即在固定时间间隔的基础上再使用Whalley-Wilmott方法或Zakamouline方法。

本文用HSIF.1309对冲HSIO.1309，使用HSI过去30天的历史波动率作为动态波动率。同样假设交易成本为0.004，风险厌恶系数为1，数量为1000份合约。由于恒生指数的动态波动率变化比较大且频繁，本文使用了在固定时间间隔的基础上的Zakamouline模型和Whalley-Wilmott模型，以及以固定时间间隔进行对冲三种方法，固定时间间隔周期均为一周（5个交易日）。

以卖出期权合约HSIO.1309 C22200的对冲为例，假设2013年4月1日卖出1 000股HSIO.1309 C22200，并用HSIF.1309进行delta对冲，到期时间为2013年9月27日，期间一共120个交易日。2013年4月1日的HSIO.1309 C22200为接近平值的实值期权，到期时为深度实值的期权，如果没有对冲，则面临巨额亏损。2013年4月1日HSIO.1309 C22200的收盘价为826，则期权费收入为826000，算上时间价值，到期时刻期权费收入相当于846910.29。表4给出了对冲与不对冲的损益分析，可知进行对冲后损失减少。表5列出了三种方法此次对冲的delta保值效果数据。

表4 2013年4月1日HSIO.1309 C22200空头的对冲与不对冲的损益分析

	到期损益		期权费收入	到期总损益
不对冲	−1007040		846 910	−160 130
	卖出期货	累计成本	期权费收入	到期总损益
Zak模型对冲	23 182 000	−23 935 045	846 910	93 865
WW模型对冲	23 182 000	−23 916 971	846 910	111 940
固定时间间隔对冲	23 182 000	−24 182 957	846 910	−154 046

表5 2013年4月1日HSIO.1309 C22200空头的几种delta对冲的效果

	固定时间间隔对冲模型	Zakamouline模型	Whalley-Wilmott模型
保值效果度量	0.2613	0.1766	0.1724

如果是在2013年7月1日卖出期权合约HSIO.1309 C22200，并用HSIF.1309进行delta对冲，到期时间为2013年9月27日，期间一共63个交易日。2013年7月1日的HSIO.1309 C22200为虚值期权，到期时为深度实值的期权。如果没有对冲，则面临巨额亏损。2013年7月1日HSIO.1309 C22200的收盘价为188，则期权费收入为188000，算上时间价值，到期时刻期权费收入相当于190364.75。表6给出了对冲与不对冲的损益分析，可知进行对冲后呈现收益状态，而不对冲则亏损。表7列出了三种方法此次对冲的delta保值效果数据，。

表6 2013年7月1日HSIO.1309 C22200空头的对冲与不对冲的损益分析

	到期损益		期权费收入	到期总损益
不对冲	−1 007 040		190 365	−816 675
	卖出期货	累计成本	期权费收入	到期总损益
Zak模型对冲	23 182 000	−22 340 467	190 365	1 031 897
WW模型对冲	23 182 000	−22 282 411	190 365	1 089 954
固定时间间隔对冲	23 182 000	−22 768 182	190 365	604 183

表7 2013年7月1日HSIO.1309 C22200空头的几种delta对冲的效果

	固定时间间隔对冲模型	Zakamouline模型	Whalley–Wilmott模型
保值效果度量	0.9344	0.4977	0.5087

从上面的对冲损益和保值效果参数的结果都能看出，Zakamouline模型、Whalley–Wilmott模型比以固定时间间隔对冲更节约成本、更有效。

作者简介：

邓璎函，女，中信建投期货研究发展部研究员，邮箱：dengyinghan@csc.com.cn。

参考文献

[1] Hodges, S., and A. Neuberger. 1989. Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs. Review of Futures Markets 8: 222~239.

[2] Hull, J.C. Options, Futures and Other Derivatives, 6th edition. New York: Prentice Hall.

[3] Sinclair, E. Volatility Trading. New York: John Wiley & Sons.

[4] Whalley, A. E., and P. Wilmott. 1993. An Asymptotic Analysis of the Davis, Panas and Zariphopoulou Model for Option Pricing with Transaction Costs. Working paper, Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics.

[5] Whalley, A. E., and P. Wilmott. 1994. Optimal Hedging of Options with Small but Arbitrary Transaction Cost Structure. Working paper, Oxford Centre for Industrial and Applied Mathematics.

[6] Zakamouline, V. 2006. Optimal Hedging of Complex Option Positions with Transaction Costs. Working paper, Faculty of Economics, Agder University College, Norway.

（责任编辑　罗　麟）