

期权隐含波动率期限结构的 Nelson-Siegel模型和波动率组成部分

The Nelson-Siegel Model Of The Term Structure Of Option Implied Volatility And Volatility Components

¹郭 彪 ²韩 乾* ³赵 彬

(¹中国人民大学财政金融学院; ²厦门大学王亚南经济研究院; ³上海交通大学高级金融学院)

摘要: 本文将 Nelson-Siegel 模型扩展到期权隐含波动率的期限结构并研究了波动率组成部分的时间序列。这三个组成部分, 分别对应于波动性期限结构的水平、斜率和曲率, 可以解释为长期、中期和短期波动率。长期组成部分是持续的且受宏观经济变量驱动, 中期和短期组成部分则分别受市场违约风险和金融市场环境驱动。三因子 Nelson-Siegel 模型可以很好地预测波动率期限结构, 同时在样本外预测方面也优于常用的确定性隐含波动率函数和受限的双因子模型, 这给波动率组成部分模型提供了支撑。

Abstract: We develop the Nelson-Siegel model in the context of option-implied volatility term structure and study the time series of volatility components. Three components, corresponding to the level, slope, and curvature of the volatility term structure, can be interpreted as the long-, medium-, and short-term volatilities. The long-term component is persistent and driven by macroeconomic variables, the medium-term by market default risk, and the short-term by financial market conditions. The three-factor Nelson-Siegel model has superior performance in forecasting the volatility term structure, with better out-of-sample forecasts than the popular deterministic implied volatility function and a restricted two-factor model, providing support to the literature of component volatility models.

一、引言

Black-Scholes模型等传统的期权定价模型和单因子随机波动模型都无法刻画隐含波动率的动态特性 (Christoffersen, Heston和Jacobs, 2009; Park, 2011) 这一观点已达成共识, 就像在收益率曲线文献中认为单因子不足以捕捉利率期限结构的时变性和截面变化, 在期权定价文献中认

可多因子模型的重要性一样。

期权隐含波动率期限结构的实证研究 (Bounie, Kwok和Park, 2003; Ditzler和Finucane, 1993; Heynen, Kemna和Vorst, 1994; Mixon, 2007; Poteshman, 2001; Stein, 1989) 已得到了共识, 即长期波动率和短期波动率对波动变动的反应不同, 因此, 一种很自然地扩展单因子波

* 韩乾, 通讯作者, 王亚南经济研究院, 中国福建省厦门大学, 经济楼 A402室, 邮编361005。电话: +86-592-2180969, 传真: +86-592-2187708, 电子邮件: hanqiao@gmail.com。

动率模型的方式是把波动率分解为长期和短期组成部分。一些最新的文献表明（Bates, 2000; Christoffersen等, 2009; Christoffersen, Jacobs, Ornathanalai和Wang, 2008; Park, 2011），波动率组成部分模型（CVM），在模拟隐含波动率期限结构方面比单因子波动率模型表现得更好。

本文提出了一个简化的波动率组成部分模型来描述期权隐含波动率期限结构的特征。我们的动机来自于固定收益类衍生品的期限结构和权益类期权的期限结构的相似性。利率和期权隐含波动率的期限结构在很多方面很相似（Christoffersen等, 2009; Derman, Kani和Zou, 1996），就像每个国债有一个对应的到期收益率，每个交易指数期权也有一个对应的隐含波动率。收益率曲线和隐含波动率的期限结构都表现出了很高的时变性和截面变化。

由这个直观的想法，我们基于连续时间双因子波动率模型扩展了Nelson-Siegel模型，并把隐含波动率分解成三个组成部分：长期、中期和短期波动率。三个组成部分分别对应隐含波动率期限结构的实证水平、斜率和曲率。另外，宏观经济和金融变量对长期波动率有显著的解释力，表明长期波动率受宏观经济和金融走势驱动。短期波动率与VIX指数高度相关，该指数是对市场投资者一个月波动率预期的测量，短期波动率的变化很大程度上可以通过失业率的变化和股票的市场增长率来解释。

我们进而建立了这些波动性组成部分的时间序列模型并检验了模型的样本内和

样本外表现。为了简化对比，我们用随机游走模型作为基准，同时对比了Nelson-Siegel模型与在Dumas, Fleming, Whaley（1998）和Pena, Rubio, Serna（1999）中提出的特殊期限结构模型。样本内和样本外检验都表明简单的Nelson-Siegel模型比这些模型表现更好，尤其对于长期期权。这对于从业者有特别的意义，因为Nelson-Siegel模型实现简单直接。无论是否把最近的金融危机包括到样本中，以上所有结果都是不敏感的。

我们还将说明传统的单因子波动率模型，比如Heston（1993）随机波动率模型，可以简化成一个双因子Nelson-Siegel模型。双因子和三因子Nelson-Siegel模型对比测试表明一个额外的波动率因子对期权定价是重要的，特别是对长期期权定价，这和期权定价需要两个状态变量的观点是一致的（Li和Zhang, 2010; Park, 2011）。

本文有如下几个贡献。第一，本文提出的Nelson-Siegel模型简洁而且易于实现。这和已有文献涉及到的CVMs方法的复杂估计形成鲜明对比；第二，我们阐明了波动率的成因。长期波动率受真实的经济增长走势驱动，而短期波动率和货币政策变动相关，这表明宏观因素对期权定价很重要；第三，我们为期权隐含波动率曲面（IVS）建模提供了一种新的视角。已有文献对IVS动态特征的建模采用选取出的主要组成部分的时间序列（Panigirtzoglous和Skiadopoulos, 2004），高阶矩（Neumann和Skiadopoulos, 2012）或隐含波动率函数（Dumas等, 1998; Pena等, 1999）等方

法。与之相比，我们的波动率组成部分方法有更好的经济解释¹。

下文的结构如下。第一节建立了期权隐含波动率的Nelson-Siegel模型；第二节介绍了数据并拟合Nelson-Siegel模型来检验提取的波动率组成部分的时间序列性质；第三节建立了期限结构的动态模型并检验了模型的样本外预测表现；第四节探究了第二个波动率组成部分的作用；第五节总结全文。

二、Nelson-Siegel模型以及收益率曲线和隐含波动率期限结构的对比

由于在预测收益率曲线方面的简洁性和有效性，Nelson和Siegel模型（1987）及其扩展模型（Diebold和Li，2006）被业界广为接受。此模型假设远期收益率曲线可以表示为

$$f_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} e^{-\lambda_t \tau} + \beta_{3t} \lambda_t e^{-\lambda_t \tau}.$$

此表达式结合到期收益率和远期利率的关系，我们可以得到收益率曲线函数

$$y_t = \beta_{1t} + \beta_{2t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right).$$

这个函数形式是一个简洁的三因子指数近似式，可以很好地预测收益率曲线（Diebold和Li，2006）。三个因子 β_{1t} ， β_{2t} 和 β_{3t} 有特别的意义。 β_{1t} 的系数为1，这个常数在极限处不会衰减到零，因此 β_{1t} 可以看成是长期因子。 β_{2t} 的系数是 $(1 - e^{-\lambda_t \tau})/\lambda_t \tau$ ，这个函数从1开始但很快地单调递减到0，因而 β_{2t} 可以看作短期因子。 β_{3t} 的系数是 $(1 - e^{-\lambda_t \tau})/\lambda_t \tau - e^{-\lambda_t \tau}$ ，这个函数从0开始，先增大，然后递减到零，因此 β_{3t} 可以看成中

期因子。此外，Diebold和Li（2006）说明了这三个因子也可以分别通过收益率曲线的水平、斜率和曲率来解释，并进一步说明这个简单的模型比其他的收益率曲线模型在样本内拟合、样本外预测方面表现更好。

鉴于收益率曲线和期权隐含波动率的相似性，很自然的问题是这个具有良好性质的模型能否应用于隐含波动率中，如果可以，那么有两个问题值得研究：第一，水平、斜率和曲率三个因素的解释是否仍然成立；第二，当模型应用于预测隐含波动率期限结构时，能否保持预测未来收益率曲线的有效性。

期权定价中的Nelson-Siegel模型

本文将证明以上问题的答案都是肯定的。在这一节，我们首先在单波动率模型的基础上建立一个双因子Nelson-Siegel模型²，然后通过引入另外一个波动率因子把模型扩展到标准的Nelson-Siegel模型。

考虑如下的波动率模型，其中即时波动率 σ_t 服从连续时间均值回归AR(1)过程：

$$d\sigma_t = -\alpha(\sigma_t - \bar{\sigma}) dt + \beta\sigma_t dz_t.$$

在 t 时刻， $t+j$ 时刻的波动率的期望为：（Ait-Sahalia，1996）

$$E_t(\sigma_{t+j}) = \bar{\sigma}_t + \rho^j(\sigma_t - \bar{\sigma}),$$

其中 $\rho = e^{-\alpha} < 1$ 。 $i_t(T)$ 表示为在 t 时刻距到期日还有 T 时间的期权的隐含波动率：

$$i_t(T) = \frac{1}{T} \int_{j=0}^T [\bar{\sigma} + \rho^j(\sigma_t - \bar{\sigma})] dj = \bar{\sigma}_t + \frac{\rho^T - 1}{T \ln \rho} [\sigma_t - \bar{\sigma}].$$

将 $\rho = e^{-\alpha}$ 代入上面的方程并整理可以得

¹ Chalmandaris和Tsekrekos（2011）首先用Nelson-Siegel模型来近似期权隐含波动性的期限结构。但是，他们没有证明运用此模型进行期权定价的正确性，也没有把此模型的因子和波动性组成部分联系起来。

² 相似的推导过程可参考Stein（1989）和Park（2011）。

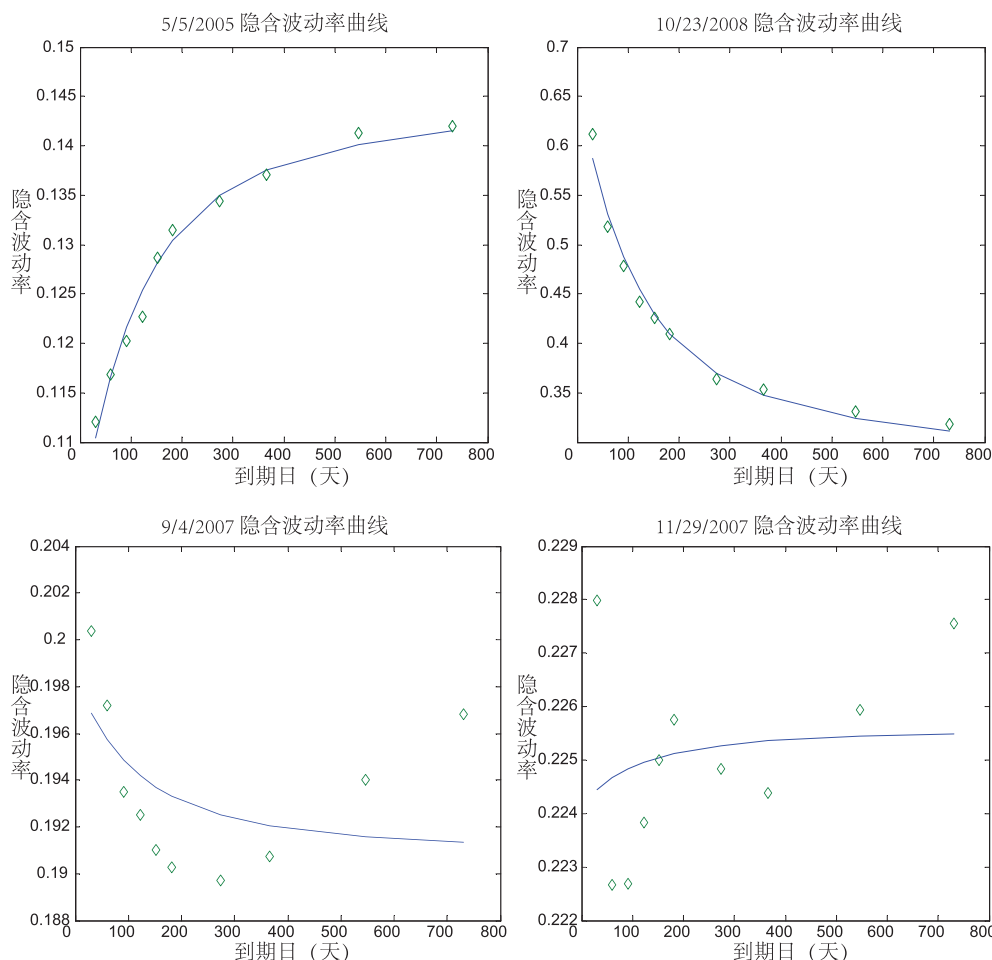


图1 利用双因子Nelson-Siegel模型拟合的曲线³

到双因子Nelson-Siegel模型

$$i_t(T) = \bar{\sigma} + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} (\sigma_t - \bar{\sigma}).$$

这里要注意对于任何均值回归速度 α ，对于到期时间的隐含波动率的一阶（二阶）导数和 $(\sigma_t - \bar{\sigma})$ 是负（正）相关的。因此当即时波动率低于（高于）历史水平，我们可以观测到一个向上（向下）的斜率和凹（凸）期限结构。在图1中，对于选定的日期，我们描绘出真实的隐含波动率曲线并用双因子隐含波动率曲线拟合。双因子模型明显只能刻画隐含波动率曲线的

特定形状而无法捕捉那些峰值，这验证了单波动率模型的缺点。

现在我们考虑如下的波动率模型，其中即时波动率 σ_t 服从连续时间过程：

$$d\sigma_t = -\alpha(\sigma_t - \bar{\sigma}_t) dt + \beta\sigma_t dz_t,$$

$$d\bar{\sigma}_t = -\kappa(\bar{\sigma}_t - \bar{\bar{\sigma}}) dt + \xi\bar{\sigma}_t dw_t.$$

这里，我们假设即时波动率均值回归到中期波动率 $\bar{\sigma}_t$ ，而中期波动率本身也服从一个均值回归过程，它的均值为长期波动率 $\bar{\bar{\sigma}}$ 。该波动率分解和Christoffersen, Jacobs, Ornathanalai和Wang（2008）中的波

³ 彩图可以参见在线版本，wileyonlinelibrary.com，下文同。

动率组成部分模型在本质上相同。 $t+j$ 时刻的波动率在 t 时刻的期望值为

$$E_t(\sigma_{t+j}) = E(\bar{\sigma}_{t+j}) + \rho^j(\sigma_t - E(\bar{\sigma}_{t+j})),$$

$$E_t(\bar{\sigma}_{t+j}) = (\bar{\sigma}_t) + \tau^j(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_t),$$

其中 $\rho = e^{-\alpha} < 1, \tau = e^{-\kappa} < 1$ 。 $i_t(T)$ 表示为在 t 时刻距到期日还有 T 时间的期权的隐含波动率,那么

$$i_t(T) = \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{\sigma}_t + \tau^j(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_t) + \rho^j(\sigma_t - E(\bar{\sigma}_{t+j})) - \tau^j(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_t) - \bar{\sigma}_t] dj$$

$$= \bar{\sigma}_t + \frac{\rho^T - 1}{T \ln \rho} [\sigma_t - \bar{\sigma}_t] - \rho^T(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_t)$$

后面一个等式通过对均值回归速度参数 ρ 和 τ 增加约束得到,目的是为了保持模型的简洁,并且避免在收益率曲线拟合(Nelson

和Siegel, 1987)时存在过度参数化问题,将 $\rho = e^{-\alpha}$ 代入上面的方程并整理得到

$$i_t(T) = \bar{\sigma}_t + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} [\sigma_t - \bar{\sigma}_t] - e^{-\alpha T}(\bar{\sigma}_t - \bar{\sigma}_t).$$

由Diebold和Li(2006)的论述,上面的方程可以重写成

$$i_t(T) = \beta_{1t} + \frac{1 - e^{-\alpha_t \tau}}{\alpha_t \tau} \beta_{2t} + \left[\frac{1 - e^{-\alpha_t \tau}}{\alpha T} - e^{-\alpha T} \right] \beta_{3t}.$$

这正是Nelson-Siegel模型的形式。在图2中,在选定的日期内,我们画出真实的隐含波动率曲线并用Nelson-Siegel隐含波动率曲线拟合。与图1相比,双因子波动率模型可以更好地拟合峰值,这是因为引入了额外的长期波动率组成部分的 β_{3t} 因子。

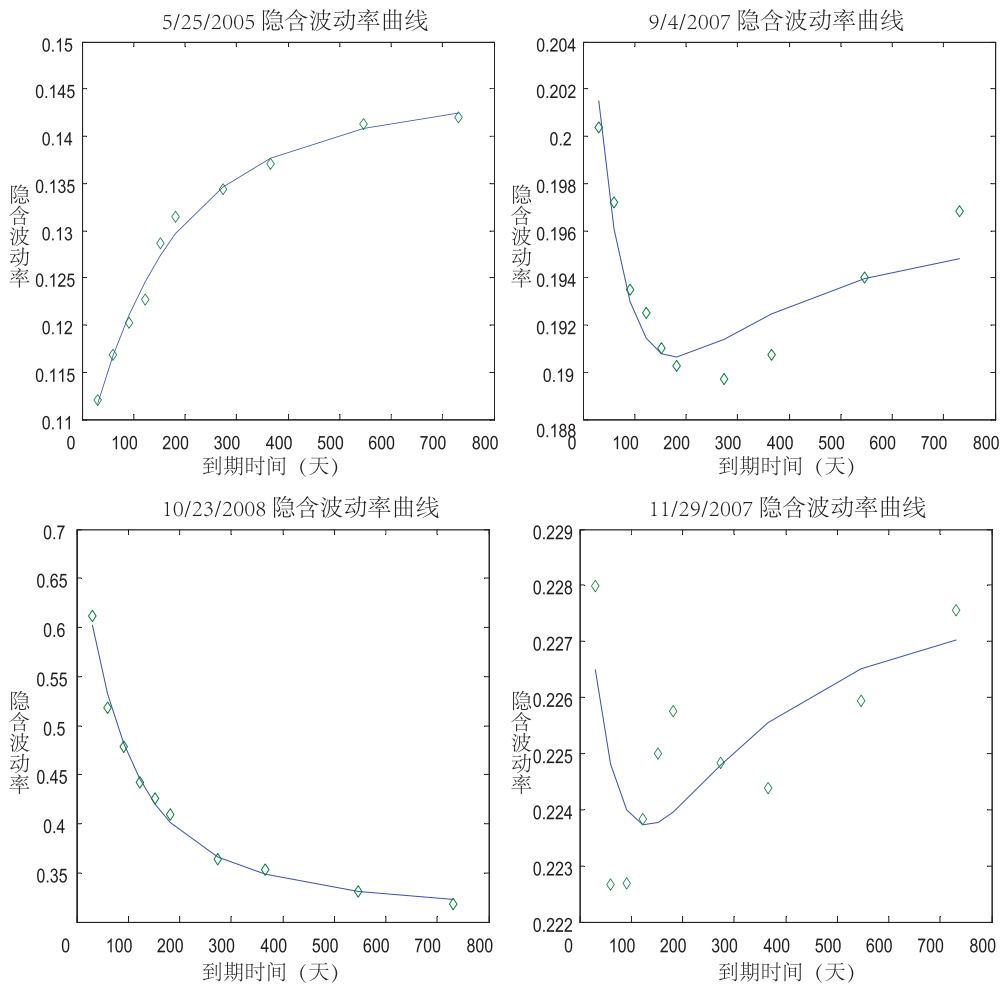


图2 用三因子Nelson-Siegel模型拟合的曲线

三、数据和波动率组成部分的性质

在这一节，我们首先介绍样本，然后用Nelson–Siegel模型来拟合波动率期限结构，最后将分析模型因子的时间序列性质并解释其经济意义。

（一）数据

我们的样本包括从2005年1月3日到2010年10月29日的S&P500指数每日看涨期权数据，共有1 468个数据点。波动率曲面取自Ivy DB OptionMetrics数据库⁴，每个交易日有10个不同的到期时间⁵。由于不是所有的到期时间每天都有交易，OptionMetrics对曲面进行了插值得到缺失数据。我们只选择delta值为0.5的期权，因为这些期权在市场中流动性最好。

表1中的A版块列出了不同到期时间期权的隐含波动率的均值、最大值、最小值、标准差和自相关系数，这些描述性的统计值本身也是有意义的。典型的隐含波动率曲面是向上倾斜的，这表明随着到期时间增加均值变大。比如，30天波动率的均值是0.1964，而730天波动率的均值是0.2043。更长到期时间的波动率比短期波动率波动性更小而且更有持续性，这表明分别对长期和短期波动率建立模型的必要性。我们也计算了波动率期限结构的实证水平、斜率和曲率：实证水平定义为365天的隐含波动率；斜率定义为365天隐含波动率减去30天隐含波动率；最后，曲率定义为122天隐含波动率减去365天与30天隐含

表1 描述性统计量

到期时间 (天)	均值	最大值	最小值	标准差	$\hat{\rho}(10)$	$\hat{\rho}(30)$	$\hat{\rho}(60)$	$\hat{\rho}(180)$
A: 隐含波动率								
30	0.1964	0.7498	0.0832	0.1058	0.9240	0.7910	0.6440	0.2980
60	0.1978	0.6727	0.0907	0.0972	0.9410	0.8350	0.6950	0.3440
91	0.1986	0.6066	0.0968	0.0914	0.9510	0.8600	0.7300	0.3780
122	0.1999	0.5750	0.1022	0.0870	0.9580	0.8730	0.7460	0.3950
152	0.2006	0.5399	0.1044	0.0830	0.9620	0.8820	0.7620	0.4150
182	0.2011	0.5044	0.1059	0.0800	0.9650	0.8920	0.7790	0.4310
273	0.2017	0.4649	0.1096	0.0749	0.9700	0.9050	0.8000	0.4590
365	0.2022	0.4449	0.1125	0.0722	0.9730	0.9100	0.8070	0.4710
547	0.2030	0.4019	0.1161	0.0669	0.9760	0.9180	0.8220	0.4910
730	0.2043	0.3839	0.1174	0.0644	0.9770	0.9200	0.8240	0.4960
因子	均值	最大值	最小值	标准差	$\hat{\rho}(10)$	$\hat{\rho}(30)$	$\hat{\rho}(60)$	$\hat{\rho}(180)$
B: 隐含波动率曲线的水平、斜率和曲率								
水平	0.2022	0.4449	0.1125	0.0722	0.9730	0.9100	0.8070	0.4710
斜率	0.0058	0.3119	-0.0683	0.0465	0.8150	0.5210	0.2810	0.0770
曲率	0.0007	0.0294	-0.0552	0.0067	0.4570	-0.0350	-0.0920	-0.0340

注：这个表格展示了隐含波动的描述性统计量，隐含波动率期限结构曲线的水平、斜率、曲率和因子的估计值。最后4列包含了位移分别为10天、30天、60天和180天的样本自相关系数。样本区间从2005年1月3日到2010年10月29日。

⁴ Ivy DB OptionMetrics是世界上第一个专业的综合性期权数据库，其搜集的数据从1996年开始，分Ivy DB US/Canada, Ivy DB Europe, Ivy DB Aisa, Ivy DB Global Indices等部分，包括了全球主要的期权品种的历史价格、隐含波动率和一些期权的敏感性信息。

⁵ 分别为30, 60, 91, 122, 152, 182, 273, 365, 547和730天。

波动率之和的一半。正如表1中的B版块所示，此实证水平在样本区间内是高度持续的，并且取值在20%左右也是合理的。在样本区间内，斜率稍微大于0，这与A中典型的向上倾斜的波动率期限结构一致。正的曲率意味着从平均来看，期限结构是凹的。

（二）拟合隐含波动率曲线

我们用Nelson-Siegel模型来拟合波动率曲线

$$y_t = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right).$$

参数 $\{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}\}$ 由最小二乘法（OLS）估计得到，其中 λ_t 固定在预设值0.0147⁶。对每天的数据应用此过程得到 $\{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}\}$ 估计值的时间序列，如图3所示。

图3中的竖线标记了三个重要的日期：2007年8月9日，全球金融危机开始；2008年9月15日，雷曼兄弟破产；2009年12月31日，危机结束。

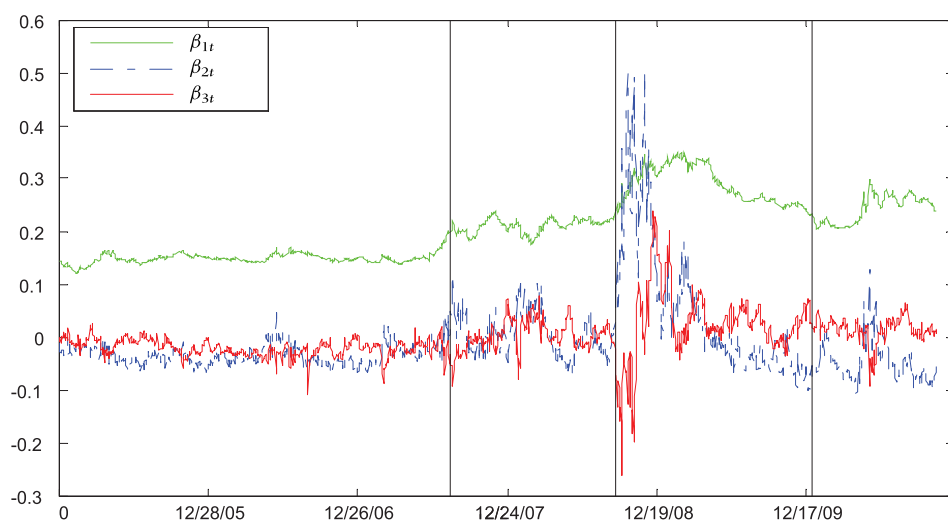


图3 因子估计值的时间序列

注：三条竖线分别表示2007年8月9日（全球金融危机开始），2008年9月15日（雷曼兄弟破产），和2009年12月31日（危机结束）。

⁶ 参数 λ_t 控制指数衰减率； λ_t 小则衰减速度慢，可以更好的拟合较长到期时间的曲线； λ_t 大产生快的衰减速度，可以更好的拟合较短到期时间的曲线。 λ_t 同时决定了 β_{3t} 的权重系数取最大值的点。鉴于此，我们选择值0.0147来最大化中期（122天）因子的权重系数。

日，金融危机结束。三个因子在金融危机之前相对稳定，但随着危机的深化变得波动性越来越大。表2中A版块列出了估计值的描述性统计量， β_{1t} 的均值为0.2047，这和样本区间内平均波动率非常接近，自相关系数说明 β_{1t} 是最具有持续性的因子，因此，很自然的将 β_{1t} 视为长期波动率组成部分。对于Nelson-Siegel模型正确性的进一步检验表明因子之间的两两相关系数并不大（见表2中的B版块）。

为确认这些变量的平稳性，我们在以下三种假设条件下进行增广的Dickey-Fuller（ADF）检验：回归方程包含常数和时间趋势项、回归方程只有一个常数项、回归方程不包括这两项。表2中的C版块展示了ADF检验的结果，所有检验都不能拒绝 β_{1t} 有一个单位根的零假设，都拒绝 β_{2t} 和 β_{3t} 有单位根的零假设，但 β_{1t} 的一阶差分看起来满足平稳性假设。

表2 估计因子的描述性统计量

因子	均值	最大值	最小值	标准差	$\hat{\rho}(10)$	$\hat{\rho}(30)$	$\hat{\rho}(60)$	$\hat{\rho}(180)$
A: 估计因子								
$\hat{\beta}_{1t}$	0.2047	0.3496	0.1206	0.0599	0.9760	0.9190	0.8290	0.5180
$\hat{\beta}_{2t}$	0.0100	0.5036	-0.1094	0.0762	0.8240	0.5430	0.2980	0.0820
$\hat{\beta}_{3t}$	-0.0010	0.2383	-0.2612	0.0418	0.5720	0.2120	0.0590	0.1290
	$\hat{\beta}_{1t}$		$\hat{\beta}_{2t}$		$\hat{\beta}_{3t}$			
B: 相关性								
$\hat{\beta}_{1t}$	1							
$\hat{\beta}_{2t}$	0.4506		1					
$\hat{\beta}_{3t}$	0.4561		-0.0492		1			
	t-统计量					P值		
C: 增广的Dickey-Fuller(ADF)检验								
$\hat{\beta}_{1t}$	-1.9080					0.6498		
$\hat{\beta}_{1t}$ 的一阶差分	-8.3386***					0.0000		
$\hat{\beta}_{2t}$	-3.4520***					0.0006		
$\hat{\beta}_{3t}$	-4.3830***					0.0000		

注：零假设：有一个单位根，*** 显著性水平为 1%。

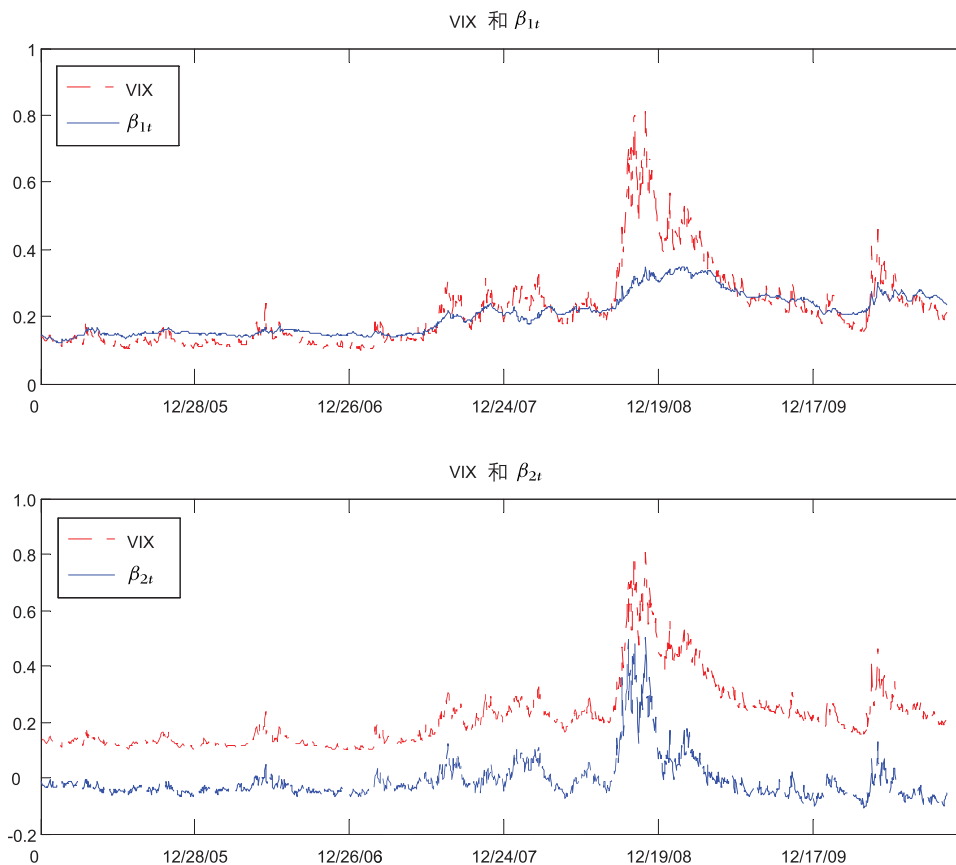


图4 $\hat{\beta}_{1t}$, $\hat{\beta}_{2t}$ 的时间序列和VIX的对比。

为了从视觉上展示分别代表长期波动率和短期波动率的两个因子，图4分别对比了 β_{1t} ， β_{2t} 和VIX指数。与VIX相比， β_{1t} 的移动更慢更光滑，可以非常好地捕捉波动率趋势，这说明它代表了长期波动率。 β_{2t} 和VIX图像很相似，相关系数高达0.8333，这和 β_{2t} 代表短期波动率组成部分的想法相一致。

下面，我们说明这三个因子，分别解释为波动率期限结构的水平、斜率和曲率。在Nelson-Siegel模型中， β_{1t} 的增加均等的提高所有隐含波动率，因为 β_{1t} 的权重对所有的到期时间是相同的。因此，它代表了隐含波动率曲线在特定时间点的水平。对于斜率，我们是如下定义的

$$slope = y(30) - y(365) = 0.6231\beta_{2t} - 0.0156\beta_{3t}.$$

第二个等式使用了最优值 $\lambda_t = 0.0147$ ，显然，斜率主要由 β_{2t} 决定。同样的，曲率

的定义为

$$\begin{aligned} curvature &= y(122) - \frac{1}{2}[y(365) + y(30)] \\ &= -0.322\beta_{2t} + 0.1254\beta_{3t}. \end{aligned}$$

这里起决定作用的是 β_{3t} 。图5画出了 $\{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}\}$ 的估计值以及通过数据计算得到的实证水平、斜率和曲率值，每一组都非常地接近。事实上，估计值和实证水平、斜率、曲率值的相关系数非常高： $\rho(\beta_{1t}, \text{水平})=0.9822$ 、 $\rho(\beta_{2t}, \text{斜率})=0.9988$ 、 $\rho(\beta_{3t}, \text{曲率})=0.8188$ 。

总的来说，我们的结果为波动率的长期、中期和短期分解理论提供了有力的实证支持。长期组成部分有持续性而且平滑，而短期组成部分平稳易变动，任何优秀的期权定价模型都应该至少能描述这两个组成部分的特征，从而可以捕捉隐含波动率期限结构的动态性质。中期组成部分的作用将在后面单独的一节中详细说明。

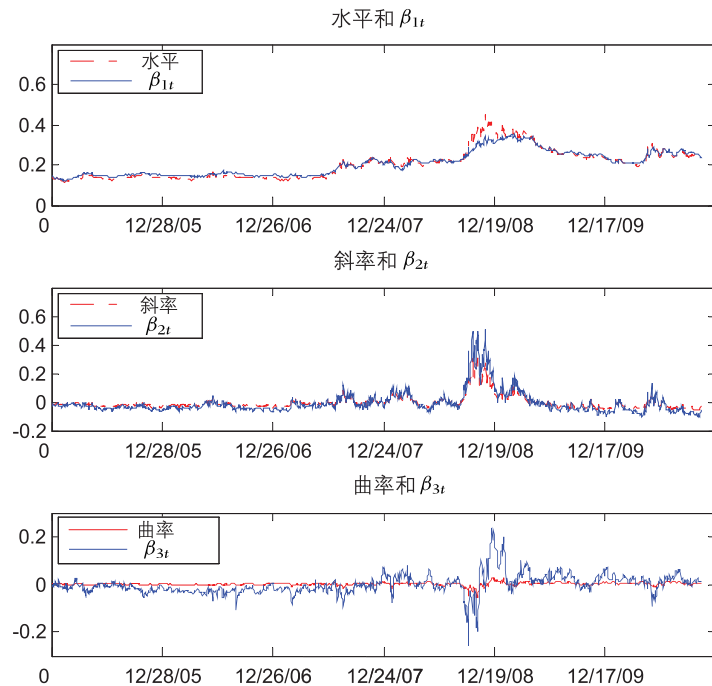


图5 基于模型的因子和实证水平，斜率，曲率的对比

表3 回归变量的相关系数矩阵

	Y	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
Y	1								
X1	-0.8690	1							
X2	-0.8685	0.7683	1						
X3	-0.3312	0.2963	0.1959	1					
X4	-0.2153	0.5729	0.1832	-0.1200	1				
X5	-0.8444	0.6300	0.6916	0.5098	-0.1480	1			
X6	-0.2689	0.141	0.1465	0.1923	-0.2072	0.3480	1		
X7	-0.9374	0.8294	0.8122	0.3142	0.1395	0.8547	0.3091	1	
X8	-0.2008	0.1151	0.0699	0.1531	-0.189	0.2137	0.4489	0.2076	1

注：变量的定义如下：Y， $\hat{\beta}_{1t}$ 的拟合值；X1，10年期固定期限国债收益率；X2，新的私有住房开工率；X3，工业生产增长率；X4，穆迪AAA公司债券收益率；X5，就业增长率；X6，生产价格指数通货膨胀率；X7，经周期调整的市盈率；X8，S & P500 每月指数增长率。宏观经济和金融变量的数据来源：联邦储备系统管理委员会；美国商务部；人口普查局；美国劳工部：劳工统计局；自动数据处理公司。

股票数据来源：普林斯顿大学出版社的“非理性繁荣”；雅虎金融。

（三）波动率的经济决定因素

在这一节，我们探究波动率组成部分的经济意义。如上所述， $\hat{\beta}_{1t}$ 和长期波动率组成部分相关。Engle, Rangel (2008) 和 Park (2011) 都指出长期波动率和宏观经济走势相关。最近，Bekaert, Hoerova和Duca (2010) 指出VIX随货币政策的变动而振动，因为短期波动率组成部分 $\hat{\beta}_{2t}$ 和VIX高度相关，所以我们猜想它也和货币政策变量有关。为检验这些假设，我们做下面的回归：

$$\hat{\beta}_{i,t} = \alpha + \gamma \hat{\beta}_{i,t-1} + \psi \bar{X}_t + \varepsilon_t,$$

其中 $i = 1, 2, 3$, $\bar{X}_t$ 是一个控制变量的向量，包括：10年期固定期限国债收益率、新的私有住房开工率、工业生产指数、穆迪AAA公司债券收益率、就业率、生产价格指数、经周期调整的市盈率和S & P500每月指数。需要注意的是在运行回归之前，我们对所有增长的变量，比如工业生产增长率、生产价格指数和就业增长率等，通过与上个月进行对数差分去趋势化。表3列

出了这些变量的两两相关系数，显然一些变量是高度相关的。为处理可能出现的多重共线性问题，我们使用逐步回归使得只有相关的变量包括进来。

为进一步验证模型的正确性，我们对每次的回归残差进行诊断分析。异方差检验表明这里没有异方差，LM检验说明残差没有自相关性。最后，没有具体列出的残差的平稳性检验表明残差列是平稳的，排除伪回归的可能性。

表4中的A版块展示了长期波动率组成部分的回归结果。回归的 R^2 值为0.941，F统计量为254.22，说明模型拟合良好。四个宏观经济和金融变量是显著的，解释了长期波动率95%的变化，这四个变量分别是：10年固定期限国债收益率、私有新开工住房率、就业率增长和经周期调整市盈率都和长期波动率负相关。这和市场观察到的经济下行则波动率增大的情况相一致。

表4中的B版块展示了短期波动率组成

表4 波动率组成部分的经济决定因素

	系数	标准误差	t-统计量	P值
A：长期波动率组成部分				
X1	-0.0146	0.0051	-2.8357	0.0061
X2	-0.0000	0.0000	-2.599	0.0116
X5	-4.2128	1.5367	-2.7414	0.0080
X7	-0.0029	0.0013	-2.3092	0.0242
C	0.2679	0.0449	5.9693	0.0000
Y1(-1)	0.3818	0.0933	4.0911	0.0001
R^2	0.9532	F-统计量	256.73	
调整的R^2	0.9495	P值(F-统计量)	0.0000	
B：短期波动率组成部分				
X5	-5.7034	2.2771	-2.5047	0.0148
X8	-0.7671	0.0646	-11.880	0.0000
C	-0.0088	0.0039	-2.2475	0.0280
Y2(-1)	0.4349	0.0761	5.7128	0.0000
R^2	0.8190	F-统计量	98.0208	
调整的R^2	0.8106	P值(F-统计量)	0.0000	
C：中期波动率组成部分				
X4-X1	0.0387	0.0047	8.3105	0.0000
X8	0.1860	0.0462	4.0296	0.0001
C	-0.0598	0.0070	-8.5637	0.0000
R^2	0.5256	F-统计量	36.57	
调整的R^2	0.5112	P值(F-统计量)	0.0000	

注：变量的定义如下：Y1, β1t的拟合值；Y2, β2t的拟合值；X1, 10 年期固定期限国债收益率；X2, 新的私有住房开工率；X3, 工业生产增长率；X4, 穆迪 AAA 公司债券收益率；X5, 就业增长率；X6, 生产价格指数通货膨胀率；X7, 经周期调整的市盈率；X8, S & P500 每月指数增长率；Y1(-1), β1t拟合值的一阶滞后；Y2(-1), β2t拟合值的一阶滞后。宏观经济和金融变量数据来源：联邦储备系统管理委员会；美国商务部：人口普查局；美国劳工部：劳工统计局；自动数据处理公司。

股票数据来源：普林斯顿大学出版社的“非理性繁荣”；雅虎金融。

部分的回归结果。就业率增长和股票市场增长是显著的，表明短期波动率组成部分同时由宏观经济和金融市场条件驱动。股票市场收益的负号反映了有详细记述的指数收益和波动率的杠杆效应。

表4中的C版块展示了中期波动率组成部分的回归结果。由10年期国债收益率和穆迪AAA公司债券收益率的差值估计得出的市场违约价差是显著的，表明中期波动率组成部分和市场违约风险紧密相关。有意思的是此时股票市场收益和中期波动率正相关，这进一步说明中期波动率组成部分和短

期波动率组成部分有本质上的不同。

四、建模并预测隐含波动率期限结构

通过Nelson-Siegel模型来预测波动率期限结构的优势在于将预测整条曲线转化成预测几个因子。在这一节，我们首先把Nelson-Siegel的每个因子建模为ARMA过程，然后组合成一个VAR模型，最后，我们对比此模型与作为基准的随机游走模型以及特殊期限结构模型的预测效果。在第4节，我们还将与单波动率模型对比。本文用2005年3月3日到2010年7月26日的数据来

估计三个因子，预测区间为2010年7月27日到2010年10月29日。

（一）ARMA和VAR模型进行预测

首先，我们把每一个Nelson-Siegel因子建模成ARMA过程。ARMA(p, q)模型的一般形式为

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

从而基于ARMA因子设定的隐含波动率预测为

$$\hat{y}_{t+h/t}(\tau) = \hat{\beta}_{1,t+h/t} + \hat{\beta}_{2,t+h/t} \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} + \hat{\beta}_{3,t+h/t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right),$$

其中

$$\hat{\beta}_{1,t+h/t} = \hat{c}_i + \hat{\phi}_{i,1} \hat{\beta}_{i,t-1} + \hat{\phi}_{i,2} \hat{\beta}_{i,t-2} + \cdots + \hat{\phi}_{i,p} \hat{\beta}_{i,t-p} + \varepsilon_t + \hat{\theta}_{i,1} \varepsilon_{t-1} + \cdots + \hat{\theta}_{i,q} \varepsilon_{t-q}.$$

我们用Box-Jenkins方法来决定AR和MA部分的阶数。 $\{\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ 的ACF和PACF表明：对于 $\hat{\beta}_{1t}$ ，ARMA(0, 1)是合适的；对于 $\hat{\beta}_{2t}$ 和 $\hat{\beta}_{3t}$ ，ARMA(3, 0)分别和ARMA(3, 2)是合适的。为保证模型的充分性，我们进

行了诊断分析。

表5列出了估计出的系数和统计量，所有系数都是显著的。注意到相比 $\hat{\beta}_{2t}$ 和 $\hat{\beta}_{3t}$ ， $\hat{\beta}_{1t}$ 的R²很小（2.4%），这并不奇怪，正如之前提到的， $\hat{\beta}_{1t}$ 比另外两个因子更有持续性而且是由一阶差分得到的。

另外，我们通过多变量的VAR(3)过程给这些因子建模，其中阶数的选择通过Schwartz准则。稳定性检验表明VAR(3)模型是稳定的，因为这里模型的参数太多，为节省空间，我们不具体列出VAR(3)的模型估计，但是，他们都是显著的，如果读者需要可以提供。

（二）三因子模型的样本外预测表现

一个优秀的隐含波动率动态曲线近似模型不仅在样本内能够很好地拟合，而且在样本外能够很好地预测。由于我们假设隐含波动率曲线依赖于 $\{\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ ，预测隐含波动率曲线也就等同于预测这些因子。

和上一节相同，我们用ARMA和VAR模型来估计和预测这三个因子。为了对

表5 基于ARMA模型估计的因子权重系数

	系数	标准误差	t-统计量	P值
$\hat{\beta}_{1t}$				
MA(1)	-0.160316	0.026416	-6.068881	0.0000
R^2	0.024087	调整的R^2		0.024087
$\hat{\beta}_{2t}$				
AR(1)	0.716204	0.026351	27.179550	0.0000
AR(2)	0.073396	0.032535	2.255932	0.0242
AR(3)	0.179121	0.026362	6.794709	0.0000
R^2	0.91086	调整的R^2		0.910732
$\hat{\beta}_{3t}$				
AR(1)	1.445019	0.111236	12.990610	0.0000
AR(2)	-1.129999	0.141286	-7.997969	0.0000
AR(3)	0.612955	0.074025	8.280412	0.0000
MA(1)	-0.651369	0.108887	-5.982060	0.0000
MA(2)	0.702288	0.076493	9.181091	0.0000
R^2	0.855019	调整的R^2		0.854603

比，我们考虑下面两个特殊的模型：

$$y_t = a_t + b_t\tau + c_t\tau^2,$$

$$y_{t+h|t} = y_t(\tau),$$

这里 τ 是到期时间。第一个模型类似于Dumas等（1998）和Pena等（1999）确定性的隐含波动率函数（IVF）；第二个模型是作为基准的一个随机游走模型。 $t+h$ 时刻的波动率预测误差定义为 $y_{t+h}(\tau) - \hat{y}_{t+h|t}(\tau)$ 。到期时间为30，60，182，365，547和730天的预测误差的描述性统计量可参见表6中的A版块。所有的误差都是除以随机游走模型的误差之后得到的。

表6 样本外预测绝对误差

到期时间（天）	ARMA	VAR	IVF
A：全部样本			
30	1.0042	0.9959	1.2299
60	0.9778	0.9921	0.9749
182	0.97	1.0016	1.4006
365	1.0196	1.0095	1.3959
547	1.0738	1.0403	1.7031
730	1.1547	1.0938	1.9661
B：去除金融危机的样本			
30	0.9128	0.9127	0.9395
60	0.8709	0.8859	0.8799
182	0.872	0.8916	0.914
365	1.2143	1.1781	1.2708
547	0.9502	0.9088	1.7438
730	1.3238	1.4157	2.5193

注：本文用随机游走模型作为基准。所有的误差都是除以随机游走模型的误差之后得到的。

从表6中可以观测到几个现象。首先，如果不考虑交易费用，对于到期时间比较短的期权，隐含波动率看起来至少可以提前一天预测，这和Chalamandaris和Tsekrekos（2011）的结果一致，在这篇论文中，作者发现Nelson-Siegel模型对预测外汇期权隐含波动率的动态性质有帮助；其

次，期权的到期时间越长，Nelson-Siegel模型相对IVF等模型的表现越好，这显示了对隐含波动率期限结构建模时波动率分解的优势。比如，对于到期时间为30天的期权，确定性波动率函数模型和Nelson-Siegel的绝对预测误差比率是1.2，182天的期权是1.4，365天的期权是1.6，547天的期权是1.6，730天的期权是1.7。

（三）样本外预测：长期期权

另外一个隐含波动率曲线模型的检验标准是能否预测超出样本到期时间范围的隐含波动率。在这一节，我们通过样本中其他的期权预测到期时间为547天和730天期权的隐含波动率。表7展示了预测的结果，平均绝对误差（MAE）和平均绝对百分比误差（MAPE）显示547天和730天到期时间期权的定价误差非常小（图6）。

表7 隐含波动率估计的MAE和MAPE

到期时间（天）	MAE	MAPE
547	0.0025	0.0122
730	0.0040	0.0206

注：MAE：平均绝对误差；MAPE：平均绝对百分比误差。

（四）没有金融危机的时期

作为一个稳健性检验，我们考虑去掉最近金融危机的时间段后模型是否仍然有很好的预测效果。样本区间开始于2005年1月3日，截至于2007年5月31日，共有606个交易日。预测区间开始于2007年3月1日，到2007年5月31日。

我们像之前一样用ARMA方法为 $\{\hat{\beta}_{1t}, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ 的时间序列建立模型。ACF和PACF表明ARMA(2, 0)模型适合 $\hat{\beta}_{1t}$ ，而ARMA(3, 0)和ARMA(2, 0)模型分别

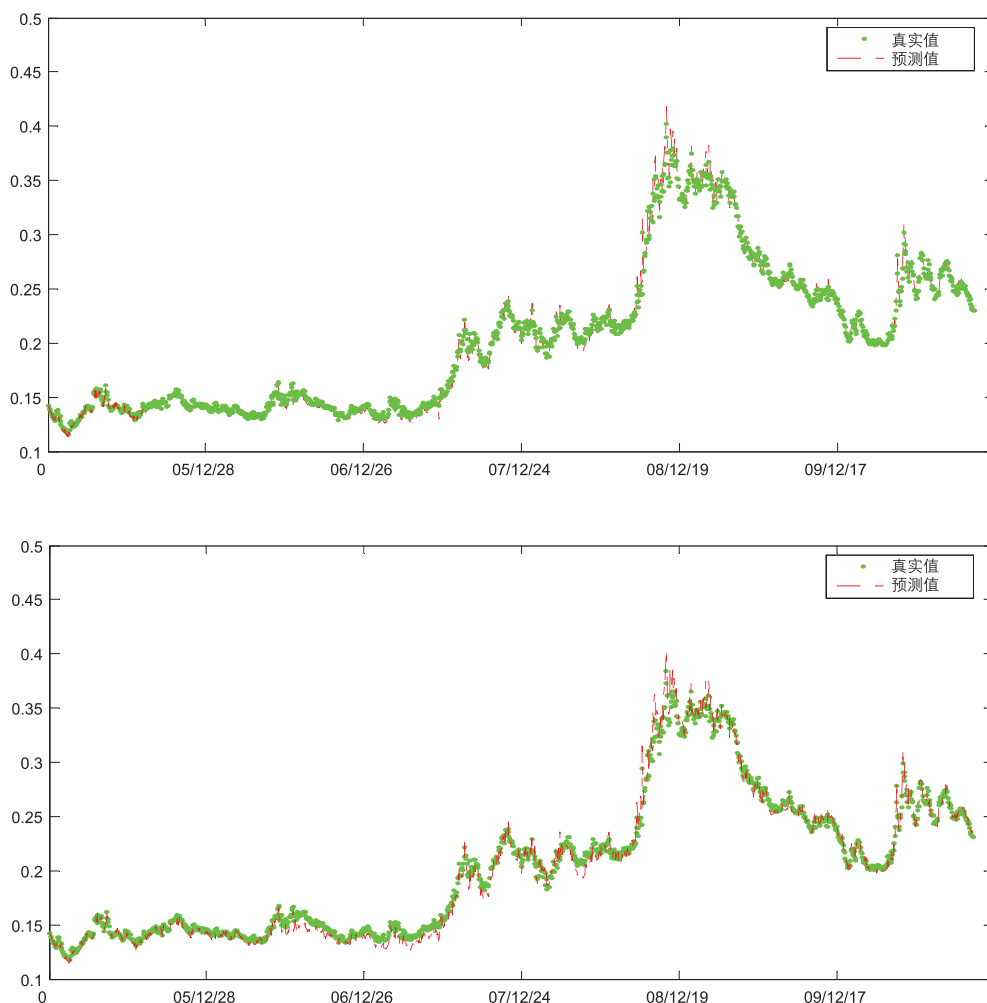


图6 到期时间为547天和730天期权隐含波动率的真实值和预测值

对于 $\hat{\beta}_{2t}$ 和 $\hat{\beta}_{3t}$ 是足够的。我们也选择了一个多变量的VAR(2)过程，模型的阶数由H-Q准则确定。

表6的B版块列出了不同到期时间期权的绝对预测误差的描述性统计量。此表再一次说明Nelson-Siegel模型可以很好的预测未来的隐含波动率，并且与IVF方法相比，对长期期权预测误差更小。

五、中期波动率组成部分的作用

我们已经说明了单波动率模型，比如Heston随机波动率模型，对应于双因子

Nelson-Siegel模型：

$$y_t = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right),$$

这里波动率可以分解成两部分。在标准的Nelson-Siegel模型中，我们把隐含波动率分解成三部分：长期，短期和中期。一个很自然的问题是：在期权定价模型中是否真的有必要包含中期组成部分？为了解决这个问题，我们重复之前的拟合和预测，表8给出了预测误差的统计细节。注意这里的误差是除以三因子模型之后得到的。

可以看到对于所有的到期时间，三因

表8 双因子和三因子Nelson-Siegel模型的ENC-NEW检验

到期时间 (天)	ENC-NEW	MAE
30	0.1489[0.4408]	1.0589
60	0.1321[0.4474]	1.0192
182	-1.4130[0.9212]	1.0733
365	1.9051[0.0284]	1.0047
547	5.5644[0.0000]	1.0511
730	6.6206[0.0000]	1.1272

注：平均绝对误差由除以三因子 Nelson-Siegel 模型的误差得到。方括号中的值是 ENC-NEW 检验的 P 值。

子Nelson-Siegel模型比双因子模型要好。为证实此结果，我们用Clark和McCracken（2001，2005）提出的ENC-New检验来对比双因子模型和三因子模型的相等预测精度。用双因子模型作为零假设，三因子Nelson-Siegel模型作为备择假设，表VIII表明对于短期期权，我们不能拒绝零假设，但是，对于到期时间大于365天的长期期权，三因子模型明显好于双因子模型。这表明波动率分解模型对于隐含波动率期限结构的建模是必要的，特别是对于长期期权。

六、结论

本文是首次通过S&P500指数期权隐含波动率的期限结构进行波动率组成部分的实证研究。受利率期限结构和隐含波动率期限结构建模相似性的启发，我们将Nelson-Siegel模型扩展到期权并研究了模型中波动率三个组成部分的时间序列。这些组成部分，分别对应波动率期限结构的

水平、斜率和曲率，可以解释为长期、中期和短期波动率。长期组成部分具有持续性，短期组成部分和VIX高度相关。我们进一步说明宏观经济和金融变量可以解释这些波动率组成部分，长期组成部分受宏观经济变量驱动，中期组成部分受市场违约风险驱动，而短期组成部分受金融市场条件驱动。这是有启发性的结果，因为经过数十年的研究，现有的文献仍没有把这些变量和期权定价联系起来。我们还说明了Nelson-Siegel模型在预测波动率期限结构方面比隐含波动率函数方法表现更好。最后，我们印证了三因子Nelson-Siegel模型在样本外预测方面优于双因子模型，这给正在快速发展的波动性组成部分模型提供了支持。

未来的工作可以通过用状态空间模型和Kalman滤波方法得到波动率组成部分，取代本文的两阶段方法。另外，有必要对Nelson-Siegel模型和其他简化的波动率期限结构模型做更加严格的对比。

作者简介：

郭彪，中国人民大学财政金融学院与中国财政金融政策研究中心助理教授。

韩乾，厦门大学王亚南经济研究院助理教授。

赵彬，上海交通大学高级金融学院助理教授。

参考文献

- [1] Ait-Sahalia, Y. (1996). Nonparametric pricing of interest rate derivatives securities. *Econometrica*, 64, 527–560.
- [2] Bates, D. (2000). Post-87 crash fears in S&P 500 futures options. *Journal of Econometrics*, 94, 181–238.
- [3] Bekaert, G., Hoerova, M., & Duca, M. (2010). Risk, uncertainty and monetary policy (No. w16397). Working paper, National Bureau of Economic Research.
- [4] Byoun, S., Kwok, C. C. Y., & Park, H. Y. (2003). Expectations hypothesis of the term structure of implied volatility: Evidence from foreign currency and stock index options. *Journal of Financial Econometrics*, 1, 126–151.
- [5] Chalamandaris, G., & Tsekrekos, A. (2011). How important is the term structure in implied volatility modelling: Evidence from foreign exchange options. *Journal of International Money and Finance*, 30, 623–640.
- [6] Christoffersen, P., Heston, S., & Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, 55, 1914–1932.
- [7] Christoffersen, P., Jacobs, K., Ornathanalai, C., & Wang, Y. T. (2008). Option valuation with long-run and short-run volatility components. *Journal of Financial Economics*, 90, 272–297.
- [8] Clark, T. E., & McCracken, M. W. (2001). Tests of equal forecast accuracy and encompassing for nested models. *Journal of Econometrics*, 105, 85–110.
- [9] Clark, T. E., & McCracken, M. W. (2005). Evaluating direct multistep forecasts. *Econometric Reviews*, 24, 369–404.
- [10] Derman, E., Kani, I., & Zou, J. Z. (1996). The local volatility surface unlocking the information in index option prices. *Financial Analysts Journal*, 52, 25–36.
- [11] Diebold, F. X., & Li, C. L. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, 130, 337–364.
- [12] Diz, F., & Finucane, T. J. (1993). Do the options markets really overreact? *Journal of Futures Markets*, 13, 299–312.
- [13] Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. E. (1998). Implied volatility functions: Empirical tests. *Journal of Finance*, 53, 2059–2106.
- [14] Engle, R., & Rangel, J. G. (2008). The spline-GARCH model for low frequency volatility and its global macroeconomic causes. *Review of Financial Studies*, 21, 1187–1222.
- [15] Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility. *Review of Financial Studies*, 6, 327–343.
- [16] Heynen, R., Kemna, A. G. Z., & Vorst, T. (1994). Analysis of the term structure of implied volatilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 31–56.
- [17] Li, G., & Zhang, C. (2010). On the number of state variables in options pricing. *Management Science*, 56, 2058–2075.
- [18] Mixon, S. (2007). The implied volatility term structure of stock index options. *Journal of*

Empirical Finance, 41, 333–354.

[19] Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curve. *Journal of Business*, 60, 473–489.

[20] Neumann, M., & Skiadopoulos, G. (2012). Predictable dynamics in higher order risk-neutral moments: Evidence From the S&P 500 options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 48, 947–977.

[21] Panigirtzoglous, N., & Skiadopoulos, G. (2004). A new approach to modeling the dynamics of implied distributions: Theory and evidence from the S&P 500 options. *Journal of Banking & Finance*, 28, 1499–1520.

[22] Park, Y.-H. (2011). The roles of short-run and long-run volatility factors in options market: A term structure

perspective. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1783937> or doi: 10.2139/ssrn.1783937.

[23] Pena, I., Rubio, G., & Serna, G. (1999). Why do we smile? On the determinants of the implied volatility function. *Journal of Banking & Finance*, 23, 1151–1179.

[24] Potesman, A. (2001). Underreaction, overreaction, and increasing misreaction to information in the options market. *Journal of Finance*, 56, 851–876.

[25] Stein, J. C. (1989). Overreactions in the options markets. *Journal of Finance*, 44, 1011–1023.

(翻译 : 陶然 ; 责任编辑 : 罗知林)