保证金制度对期权定价的影响

The Influence of Option Margin Rules on Option Pricing

汤　弦[1]　晋　田[2、3]
（[1]上海证券交易所资本市场研究所，[2]上海证券交易所博士后工作站，
[3]复旦大学应用经济学博士后流动站，上海　200120）

摘要：传统的布莱克－斯科尔斯 (Black-Scholes) 期权定价模型（简称 B-S 模型）并没有考虑期权保证金的影响。我们研究发现，在组合保证金（Portfolio Margin）制度下，保证金对 B-S 模型的影响几乎的确可以被忽略，但其他非组合保证金制度安排对期权定价可能有着显著影响。基于 B-S 模型的稳健性，同时为了便于比较，本文沿用 B-S 假设，研究了特定期权保证金制度对期权定价的影响，并据此得出了无套利区间。结果发现，若采用与我国期货市场类似的期权保证金制度下，虚值期权可能会存在无套利空间过大、有效定价机制缺失的问题。结合中国金融市场的实际情况，我们建议最好在期权推出初期就实行国际通用或相对合理的保证金制度。

关键词：期权定价　保证金　B-S 模型　无套利区间

一、文献综述与研究框架

期权定价是当代金融学最重要的问题之一，具有很高的学术价值和实用价值。1900年，Bachelier首次提出了使用布朗运动来刻画股票价格的变动,这为期权定价奠定了初步基础[1]。上世纪60年代以来，大量业界人士与学者参与到股票期权和认股权证定价的研究中来。1961年，耶鲁大学的博士生Sprenkle提出了一个认股权证定价公式，其与后来的B-S公式非常接近，但需要投资者知道股票的预期收益以及自己的风险偏好[2]。1964年，芝加哥大学的博士生Boness在此基础上，进一步考虑了现金贴现率，并假设它与股票的预期收益率相同，提出了一个更简单并且更接近B-S的公式[3]。1965年，宏观经济学大师Paul Samuelson推广了Boness的工作，提出了新的定价公式,但仍然需要对期望收益率进行预测[4]。

1965年1月，Fisher Black在认识了资本资产定价模型（CAPM）创建人之一的Jack Treynor后，便对期权定价产生了浓厚的兴趣，开始从事这项研究。1968年，麻省理工学院（MIT）的金融学教授Myron Scholes听说了Black的工作，便联系他，两人开始联手攻克这个难题。

Scholes熟悉无套利定价，并试图将此思想应用到权证定价中。他认为，通过认股权证以及标的股票的多空组合，人们可

以构造出一种beta为0的资产。根据CAPM，这个资产应该获取无风险收益率。然而他并不知道如何来创建这样的投资组合。

Black则精通具有相关性的各种参数间关系的建模，他利用泰勒级数展开等技术,通过无风险对冲的技巧，建立了期权价格满足的偏微分方程（即Black–Scholes方程）。他曾花费大量时间去求解这个方程，但是没有取得成功。尽管如此，他仍然对自己的工作充满信心，因为从偏微分方程的形式可以看出，与前期所有人的研究不同，期权的价格与股票的预期收益率无关。

1973年，Black和Scholes正式提出了著名的布莱克–斯科尔斯(B–S)期权定价模型[5]：

$$C_0 = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

C_0表示认购期权的价格，S表示股票市场价格，K表示执行价格，r表示无风险利率，σ表示历史收益率标准差，$T-t$表示期权到期剩余期限，$N(x)$为标准正态分布的累计分布函数。

该公式与之前的定价公式最大的差别在于B–S公式中没有任何需要主观决定的参数，完全跳出了预测收益率这个怪圈，使期权定价的发展进入了一个崭新的时代。

1967年，Merton进入MIT经济学博士项目，在其导师Samuelson手下进行权证定价的研究。1969年，Samuelson和Merton认识到可以将权证的价格看作是股票价格的一个函数，他们引入了基于风险的效用函数而获得了权证的定价公式[6]。然而这个效用函数是因人而异的，并且很难获取相关参数。

Merton在1970年秋天看到Black和Scholes的报告后，立即领会了这项成果的潜力。他认为Black和Scholes的方法是“凭借直觉”的，并不“严密”。他并不将期权定价的基础建立在CAPM上，而是认为构造的期权和股票的组合如果能在期权的期限内持续调整证券数量则能避免交易中的所有风险，并指出这个动态调整的组合将获取无风险利率。当时掌握随机微积分的经济学家屈指可数，而Merton正是其中之一，他可以处理这种持续不断的动态复制，并基于伊藤引理等工具推导出与B–S相同的公式。

Merton在Black和Scholes两个人的成果被期刊接受后才很绅士地发表了自己的论文[7]。该成果在无套利原理的假设下，在更一般的框架中，对期权定价的各种定量关系作了深入分析。

B–S公式自问世以来得到了学术界和实业界的广泛关注，对现实市场产生了非常大的影响。1997年，Merton和Scholes由于其在期权定价上所做的贡献获得了诺贝尔经济学奖（此前Black已去世）。然而，在业界中也有一些反对B–S公式的声音。其中，Haug和Taleb的批判最为尖锐，他们主要提出了3大理由[8]：

1. B–S公式根本没有在市场上被应用，包括那些自认为在应用此公式的投资者，并把这类现象称之为俗套性愚昧。

2. B-S公式是多余的。作者指出在B-S公式诞生之前，市场上的交易员已经拥有关于期权定价、对冲和风控的一套成熟的知识体系。

3. B-S公式并不是原创的。作者认为Boness发表的公式与B-S公式是完全相同的。此外，著名对冲基金投资家Edward Thorp也指出他本人在1967年已经猜到了BSM公式，但出于给他的投资人创造更多盈利的目的而特地将其保密了。

当代著名金融工程学家Wilmott对这三点质疑进行了回应[9]。他指出：

1. B-S模型，以及基于B-S模型修改后的模型，现在仍是被很多交易员使用，包括他自己所在的公司。

2. 那些轻视B-S模型的交易员所用的模型和交易方法也有很多问题,远不及更为灵活的B-S模型。

3. 1973年前B-S模型可能已被发现并且很可能被Edward Thorp在交易中使用。作为等价交换，Thorp获得了收益，但是失去了诺贝尔奖。

其他关于B-S公式的批判主要是针对其假设。Blattberg 和Gonedes发现历史数据违背了B-S公式中对数正态分布的假设[10]。Westerfield认为用若干个不同正态分布的变量之和更能体现出收益率中的高峰态特性[11]。Ball和Torous发现收益率是某种连续分布和跳跃分布的结合体[12]。Rubinstein利用历史期权价格测试了BSM公式，发现BSM公式关于执行价格所表现出来的波动率偏斜是显著的，从侧面证明了B-S公式的无效性[13]。另外，B-S模型要求的交易无摩擦在现实中是无法达到的。

针对这些假设的不满足，近年来很多学者通过对B-S模型中的假设进行修改和推广而得出其他定价公式。1976年， Black针对期货期权推导出了Black期货期权定价模型[14]；1976年，Merton给出了在有跳跃的扩散模型下，当跳跃的幅度适合对数正态分布时的期权定价公式[15]；1985年，Leland研究了考虑交易费用的情况下，欧式期权的定价问题[16]；1993年，Heston研究了在随机波动率情况下欧式期权的定价问题[17]。更多对B-S公式的推广可参考<Paul Wilmott on Quantitative Finance>[18]。

对于B-S模型假设过强的问题，Wilmott承认B-S模型的假设有很多的瑕疵，但是B-S模型有很好的稳健性，只要进行些许的修改和调整，就可以很好地进行期权定价和套利。对于收益率分布的肥尾效应，Wilmott从实用的角度出发认为没必要为了小概率事件将定价模型复杂化，与其发明一个复杂而难以计算的定价公式，还不如保持简单快速的B-S公式，并专注于风险分散和风险管理上。对于离散对冲而产生的误差，他承认在少量交易中误差确实较大，然而如果进行大量的对冲交易，就可以有效规避掉这类误差，并获得类似连续动态对冲的很多效益。至于B-S模型关于波动率的假设可能在实际中得不到满足，Wilmott认为由于交易期权所得的收益并不完全依赖于对冲时所采用的波动率，所以有理由使用波动率假设更简单的B-S模型。

综上所述，本文同意Rebonato的结

论：隐含波动率模型从本质上而言就是把错误的数字（即隐含波动率）代入到错误的公式（即B–S模型）中，却错打错着地得到了正确的价格[19]。

本文将重点考虑期权保证金制度对期权定价的影响。由于国外期权保证金制度与B–S的内在要求较为一致，所以我们暂未发现国外有这方面的专题研究。国内对此的相关理论研究也相对很少。2004年，谷艳玲利用不完全市场中未定权益的复制和定价的方法得到实行保证金制度的期货期权定价模型，并通过倒向随机微分方程计算模型的数值解[20]。2005年，奚炜考虑了期货保证金与手续费，对Black的期货期权定价模型进行了改进[21]。但他们主要考虑的都是标的期货收取的保证金对期货期权定价的影响。本文在考虑期权保证金的情况下，对B–S模型进行了推广，研究了保证金制度对期权定价的影响，并得出了对应的无套利区间。

二、考虑特定期权保证金制度的期权定价公式

从上一节的讨论可以看出，虽然B–S公式假设有些不切实际，但是其良好的稳健性和灵活性允许我们对这些假设进行修改和推广。同时，为了和B–S模型进行对比，以下我们假设除了保证金制度，B–S模型中的其他假设仍然成立。具体地，B–S公式有以下一些基本假设：

1. 股票价格随机连续波动并服从对数正态分布；

2. 在期权有效期内，无风险利率和股票资产的价格波动率是恒定的；

3. 市场无摩擦，即不存在税收、保证金和交易成本等；

4. 股票资产在期权有效期内不支付红利及其它所得；

5. 该期权是欧式期权，即在期权到期前不可实施。

要说明的是，虽然本文的推导是基于B–S模型，但是本文的研究方法同样适用于Leland模型、Heston模型等其他期权定价模型。

由于成熟衍生品市场采用的组合保证金制度收取的保证金比例较低，并且保证金所得的利息会返还给客户，所以在成熟市场中保证金制度的影响可以忽略。但根据我国金融市场的一些固有特点，未来的期权保证金制度与B–S模型要求的保证金制度可能会有以下差别：

1. 出售期权所得的权利金需存入保证金账户中作为初始保证金。

2. 出售期权需要将与对应数量合约标的市值的一定比例的现金存入保证金账户。

3. 保证金账户中的资金利息所得不返还投资者[1]。

4. 只能用现金充当保证金，且无保证金冲抵制度。

这些制度导致了保证金收取比例过高，给期权卖方带来了额外的资金成本。做市商等期权净卖出方的最优卖价为其复制期权的成本。当他面对过高保证金时，

[1] 由于国内活期利息很低，该条件可减弱到返还活期利息。

其资金成本导致其复制成本增加，也就是最优卖价增加。本文以B–S模型与无套利原理为基础，考虑了期权保证金制度如何影响期权卖出方的最优卖价。

具体地，假设对于期权卖出方收取的保证金为卖出该期权所得权利金加上对应数量的标的股票市值的一定比例m，且保证金所得利息不归期权卖出方所有[2]。假设B–S公式中的其他条件成立，令标的股票价格S服从于对数正态分布

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

其中波动率σ为常数，dw为标准布朗运动。

令C为认购期权的价格，当期权卖出方卖出一个期权合约时，买入$\delta = \frac{\partial C}{\partial S}$份的标的股票进行对冲。此时，其拥有的证券头寸为

$$\Pi = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S$$

其缴纳的保证金为：

$$C + mS$$

于是进行该对冲交易所消耗的资金量一共为

$$\Omega = \frac{\partial C}{\partial S} S + mS$$

由于认购期权的价格$C = C(S, t)$为S与t的函数，根据伊藤引理，它在很短时间dt内的变化dC满足

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} \mu S dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial C}{\partial S} \sigma S dw$$

所以该投资组合在很短时间dt内的变化为

$$d\Pi = -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS = -\frac{\partial C}{\partial t} dt - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt$$

由上式可看出投资组合Π的变化不含dw，从而是一个无风险的投资组合，于是根据无套利定价原理,该投资组合的变化应该满足

$$d\Pi = r\Omega dt$$

也就是

$$\left(-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt = r\left(\frac{\partial C}{\partial S} S + mS\right) dt$$

于是可以推导出以下偏微分方程

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + rmS = 0$$

该方程的边界条件为

$$C_T = (S_T - K)_+$$

求解该方程我们得到结论1。

结论1：考虑保证金的期权最优卖价为

$$C_u = SN(d_1)e^{r(T-t)} - KN(d_2) + mS(e^{r(T-t)} - 1)$$

其中d_1和d_2与B–S公式中的定义相同。

注释1：最优卖价C_u可以被拆分为以下三个部分

$$C_u = C_0 + C_0\left(e^{r(T-t)} - 1\right) + mS(e^{r(T-t)} - 1)$$

其中第一部分C_0为B–S理论价格，第二部分$C_0\left(e^{r(T-t)} - 1\right)$为由于权利金存入保证金账户而产生的额外成本，第三部分$mS(e^{r(T-t)} - 1)$为由于存入对应数量合约标的市值的一定比例的现金而产生的资金[3]成本。

三、无套利区间数值分析

B–S公式理论价格C_0与卖方最优卖价C_u之间的价格区间为该期权的无套利区间。当期权的市场价格介于C_0与C_u之间时，期权卖出方由于成本高于售价不愿意卖出期权。无套利区间过大可能会导致期权的炒作空间过大，给投资者带来巨大的交易风险，严重影响市场的效率和稳定。

[2] 注意到保证金由两部分组成，即使m=0也不代表不收取保证金。

[3] 由于第二部分的存在，即使m=0时，最优卖价C_u与C_0仍不相同。

表1 到期日为两周的无套利区间

波动率	期权价格	标的价格								
		8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12
0.2	C_0	0.0000	0.0000	0.0007	0.0221	0.1733	0.5421	1.0220	1.5208	2.0208
	C_u	0.0017	0.0018	0.0026	0.0241	0.1758	0.5454	1.0265	1.5264	2.0275
0.3	C_0	0.0000	0.0008	0.0110	0.0712	0.2546	0.5921	1.0361	1.5231	2.0211
	C_u	0.0017	0.0025	0.0129	0.0733	0.2572	0.5956	1.0405	1.5287	2.0278
0.4	C_0	0.0008	0.0070	0.0379	0.1334	0.3358	0.6565	1.0695	1.5354	2.0245
	C_u	0.0024	0.0088	0.0399	0.1357	0.3386	0.6601	1.0740	1.5410	2.0312
0.5	C_0	0.0049	0.0233	0.0787	0.2020	0.4171	0.7278	1.1179	1.5618	2.0365
	C_u	0.0066	0.0251	0.0808	0.2044	0.4200	0.7315	1.1225	1.5674	2.0432

表2 到期日为半年的无套利区间

波动率	期权价格	标的价格								
		6	7	8	9	10	11	12	13	14
0.2	C_0	0.000	0.004	0.046	0.235	0.689	1.408	2.295	3.259	4.250
	C_u	0.015	0.022	0.067	0.264	0.732	1.471	2.384	3.375	4.393
0.3	C_0	0.006	0.044	0.176	0.471	0.963	1.637	2.446	3.343	4.292
	C_u	0.021	0.063	0.201	0.506	1.013	1.706	2.538	3.461	4.436
0.4	C_0	0.038	0.138	0.355	0.720	1.239	1.894	2.658	3.503	4.403
	C_u	0.054	0.159	0.384	0.761	1.295	1.969	2.755	3.624	4.550
0.5	C_0	0.104	0.271	0.557	0.973	1.513	2.162	2.901	3.710	4.573
	C_u	0.122	0.295	0.591	1.020	1.576	2.245	3.005	3.837	4.725

对此，我们对无套利空间进行数值分析。假设标的股票初始行权价格为K=10，无风险利率为5%，保证金占标的股票比例m=10%，到期日分为10个交易日（两周的短期期权）以及120个交易日（半年的长期期权），标的股票波动率分别为20%、30%、40%和50%，我们计算出标的股票不同价格时所对应的认购期权的理论价格以及卖出方的最优卖价。

从表1中可以看出，对于短期期权，最优报价和B-S理论价格相差在0.01元之内，从绝对额上几乎可以忽略。然而从相对值而言，对于深度虚值期权，期权最优卖价中，几乎100%都是利息成本：当标的股票跌到8元时，本来价格几乎为0的认购期权由于保证金成本的原因，其最优卖价为0.0017元。

从表2中可以看出，对于长期期权，最优报价和B-S理论价格最多有0.15元的差别，这部分成本是不可忽略的。这个现象与现实是一致的：实务中，做市商等期权卖出方对长期期权交易的积极性不高，主要就是由于保证金的资金成本原因。同样的，对于深度虚值期权，其最优卖价中几乎都是由保证金的利息成本构成。

四、对国内期权市场保证金制度的启示

期权自身的特点决定了期权买卖双方的风险和收益是不对称的。期权的买方不需要交保证金，其风险是可控的，而潜在

的收益可能是无穷的。所以买期权就像买彩票，有非常大的市场潜力。然而期权卖方需要缴纳保证金，最大的收益仅为期权的权利金，潜在的损失可能是无穷的。一般投资者的风险管理能力决定了他们很难成为期权卖家，所以根据国际经验，期权买方多为散户，而卖方则多为机构投资者和做市商。

对于国内而言，证券市场中散户的比例非常大，市场投机气氛很浓，市场炒作特别盛行。再加上目前期权投资者分级管理限制了部分投资者卖空期权的权利，很有可能导致未来期权市场的供求关系严重失衡。如果保证金制度设计不当，卖方承受的资金成本太高，其卖出期权的积极性将严重受损，最终会导致市场的卖方力量严重不足，进而会引发期权价格大幅度波动，甚至可能重蹈“末日权证”的覆辙。所以期权保证金制度的合理性是期权产品能否成功的关键要素之一。

组合保证金是国际市场通用的期权保证金制度。根据本文以上的分析，它也应是我国期权市场的发展目标。在我国特定的证券/期货市场进行前端控制的条件下，实施组合保证金的确有较大的技术难度，这样一个自然的想法就是在期权推出初期采用较简单的保证金制度，未来再切换到更优的制度。但事实上这种切换存在较大的风险。由于期权不同于期货，保证金的收取对买卖双方是不对称的，保证金制度的切换必然会直接影响买卖双方的力量对比以及期权价格，最终可能会使市场发生较大波动。当年权证因为供需失衡发生暴涨，为了平衡买卖力量引入券商进行创设，结果导致权证价格暴跌，相关管理机构受到了质疑，被指责说任意修改交易规则，没有契约精神，最终导致权证市场的关闭。所以我们建议，即使技术难度较大，在期权推出之初，保证金制度也应尽可能与国际接轨，采用组合保证金，或者至少是策略保证金制度，同时考虑可用有价证券等充抵保证金。

参考文献

[1] Bachelier, L., Th é orie de la sp é culation. 1900: Gauthier−Villars.

[2] Sprenkle, C.M., Warrant prices as indicators of expectations and preferences. Yale economic essays, 1961. 1(2): p. 178−231.

[3] Boness, A.J., Elements of a theory of stock−option value. The Journal of Political Economy, 1964: p. 163−175.

[4] Samuelson, P.A., Rational theory of warrant pricing. Industrial management review, 1965. 6: p. 13−31.

[5] Black, F. and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities. The journal of political economy, 1973: p. 637−654.

[6] Samuelson, P.A. and R.C. Merton, A complete model of warrant pricing that maximizes utility. Industrial Management Review, 1969. 10(2): p. 17−46.

[7] Merton, R.C., Theory of rational option pricing. The Bell Journal of economics and management science, 1973: p. 141–183.

[8] Haug, E.G. and N.N. Taleb, Why we have never used the Black–Scholes–Merton option pricing formula. Social Science Research Network, 2009.

[9] Wilmott, P., In defence of black, scholes and merton, in Paul Wilmott's Blog. 2008.

[10] Blattberg, R.C. and N.J. Gonedes, A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. Journal of Business, 1974: p. 244–280.

[11] Westerfield, R., The distribution of common stock price changes: An application of transactions time and subordinated stochastic models. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1977. 12(05): p. 743–765.

[12] Ball, C.A. and W.N. Torous, On jumps in common stock prices and their impact on call option pricing. The Journal of Finance, 1985. 40(1): p. 155–173.

[13] Rubinstein, M., Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23, 1976 through August 31, 1978. The Journal of Finance, 1985. 40(2): p. 455–480.

[14] Black, F., The pricing of commodity contracts. Journal of financial economics, 1976. 3(1): p. 167–179.

[15] Merton, R.C., Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of financial economics, 1976. 3(1): p. 125–144.

[16] Leland, H.E., Option pricing and replication with transactions costs. The journal of finance, 1985. 40(5): p. 1283–1301.

[17] Heston, S.L., A closed–form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. Review of financial studies, 1993. 6(2): p. 327–343.

[18] Wilmott, P., Paul Wilmott on Quantitative Finance, 3 Volume Set. 2007: John Wiley & Sons.

[19] Rebonato, R., Volatility and Correlation in the Pricing of Equity, FX, and Interest–rate Options. 1999: John Wiley.

[20] 谷艳玲, 实行保证金制度的期货期权定价.期货与金融衍生品, 2004. 11: p. 41–58.

[21] 奚炜, 期货期权定价与交易保证金、执行手续费.期货与金融衍生品, 2005(5): p. 30–35.

（责任编辑：黄　伟）